2007年9月18･19日（火・水）

第35回Mech D&Aセミナー

動的応答の理論と解析II（中級編）空間離散化による多自由度系の振動とモーダル解析の基礎理論

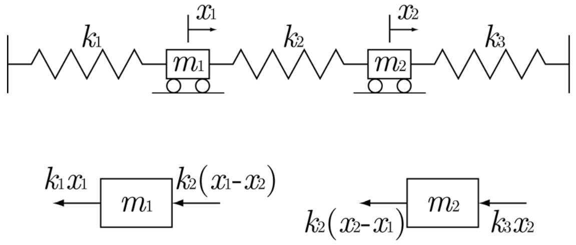
2007年9月18･19日

株式会社メカニカルデザイン

2自由度系の運動方程式（無減衰系）

- 2自由度無減衰系の自由振動の運動方程式

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$



2自由度無減衰系

ハミルトンの原理

- ハミルトンの原理：運動方程式を導く方法の一つ
- 質量mの1質点に外力fが作用するとき，変位qは次式で定められる．

$$m\ddot{q} - f = 0 \tag{3.1}$$

式(3.1)に仮想変位 δq（ $t = t_1, t_2$ にて $\delta q = 0$ ）を掛けて t_1 から t_2 まで積分する．

$$\int_{t_1}^{t_2} (f - m\ddot{q})\delta q dt = 0 \tag{3.2}$$

※任意の δq に対して式(3.2)が成立するとき式(3.1)と式(3.2)は同じ内容を表す．

- 外力による仮想仕事 δWとポテンシャルエネルギーの変分 δU

$$\delta \bar{W} = f\delta q = (f_{\rm ext} + f_{\rm int})\delta q = \delta W - \delta U \tag{3.3}$$

と運動エネルギー T の変分

$$\delta T = m\dot{q}\delta\dot{q} \tag{3.4}$$

を用いて式(3.2)を書き直すとハミルトンの原理が得られる．

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0} \tag{3.5}$$

ラグランジュの方程式

- ラグランジュの方程式：運動方程式を導く方法の一つ．多自由度系の問題に便利な式

運動エネルギー T はqと$\dot{q}$の関数，
ポテンシャルエネルギー U はqの関数なので，それぞれの変分は次のとおり．

$$\left.\begin{aligned} \delta T &= \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \\ \delta U &= \frac{\partial U}{\partial q}\delta q \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

また，仮想変位 δqによって外力 $f_{\rm ext}$ がなす仮想仕事 δW は $\delta W = f_{\rm ext}\delta q$
であるから，これらをハミルトンの原理(3.5)に代入し整理すると次のようになる．

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} + f_{\rm ext} \right\} \delta q dt = 0 \tag{3.7}$$

したがって

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_{\rm ext}} \quad \text{:ラグランジュの方程式} \tag{3.8}$$

ただし

$$L = T - U \quad \text{:ラグランジアン} \tag{3.9}$$

はりの曲げ振動 形状関数によるたわみの表示

- 未知量：各節点のたわみ　$u = u_0, u_1, \cdots, u_N$ (3.28)

  各節点の傾き　$\theta = \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_N$ (3.29)
- 節点 i, j 間のたわみの近似：

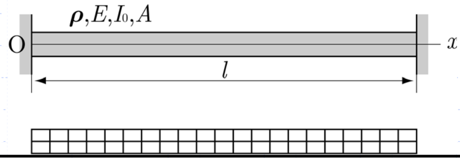
$$u(x,t) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \tag{3.30}$$

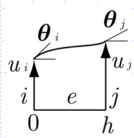
ここで係数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は時間の関数で， $u(x,t), du(x,t)/dx$ が要素の両端で u_i, u_j および θ_i, θ_j に一致することから求められ，それらを式(3.30)に代入し整理すると

$$u(x,t) = N_1(x)u_i + N_2(x)h\theta_i + N_3(x)u_j + N_4(x)h\theta_j \tag{3.31}$$

ここに， $N_1(x), hN_2(x), N_3(x), hN_4(x)$ は形状関数である．

$$\left.\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\left(\tfrac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\tfrac{x}{h}\right)^3, & N_2(x) &= \tfrac{x}{h} - 2\left(\tfrac{x}{h}\right)^2 + \left(\tfrac{x}{h}\right)^3 \\ N_3(x) &= 3\left(\tfrac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\tfrac{x}{h}\right)^3, & N_4(x) &= -\left(\tfrac{x}{h}\right)^2 + \left(\tfrac{x}{h}\right)^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$





はりの曲げ振動 要素のエネルギー

- 運動エネルギー

$$T_e = \frac{1}{2}\{\dot{u}(t)\}_e^T [m]_e \{\dot{u}(t)\}_e \tag{3.33}$$

ここに，

$$[m]_e = \int_0^h \rho A \{N(x)\}_e \{N(x)\}_e^T dx \tag{3.34}$$

- ポテンシャルエネルギー

$$U_e = \frac{1}{2}\{u(t)\}_e^T [k]_e \{u(t)\}_e \tag{3.35}$$

ここに，

$$[k]_e = \int_0^h EI_0 \frac{d^2}{dx^2}\{N(x)\}_e \frac{d^2}{dx^2}\{N(x)\}_e^T dx \tag{3.36}$$

- 仮想仕事

$$\delta W_e = \{f(t)\}_e^T \{\delta u\}_e \tag{3.37}$$

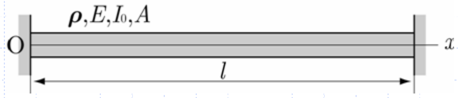
ここに，

$$\{f(t)\}_e = \int_0^h f(x,t)\{N(x)\}_e^T dx \tag{3.38}$$

演習問題6：はりの振動

- 無減衰系の両端固定はりの強制振動について，モード重ね合せ法を用いて解き，理論解と直接法による応答と比較する.
- 4節点線形平面ひずみ要素（CPE4）を使用.
- C:¥temp¥problem¥Ex6

- モデルの条件
  - 断面：　$b = h$=10mm
  - 長さ：　l=100mm
  - 面積：　$A = bh$ =100mm^2
  - 断面2次モーメント：　$I_0 = bh^3/12$=833.3mm^4
  - ヤング率：　E=20000kgf/mm^2
  - ポアソン比：　ν=0
  - 密度：　$\rho = 8 \times 10^{-10}$kgfs^2/mm^4



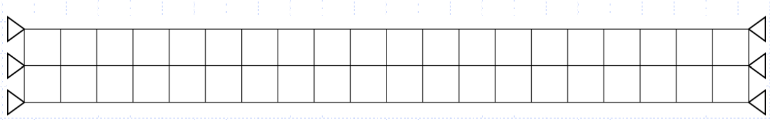
手順1：固有振動数（ex4s.inp結果の再記述）

- 固有振動数

	1次（曲）	2次（曲）	3次（曲）	4次（縦）
理論解	5139.6Hz	14167.5Hz	27774.Hz	25000.Hz
数値解	4930.1Hz	12867.Hz	23625.Hz	24974.Hz

- 相対誤差

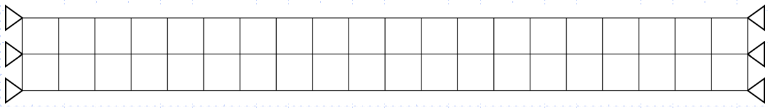
1次（曲）	2次（曲）	3次（曲）	4次（縦）
4.08%	9.18%	14.94%	0.10%



手順2-1：FEMによる周波数応答解析

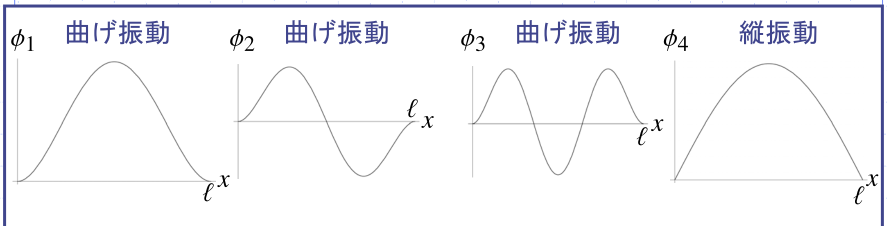
- 両端固定はりの周波数応答解析を行う.
- 入力ファイル(ex6s.inp)を編集する.
  - 板厚(h)を入力する.
  - ヤング率(E)を入力する.
  - 密度(rho)を入力する.
- ABAQUSを実行する.
- 結果を表示する.
  - モードベクトルを確認.

h	E	rho
10.	20000.	8.E-10

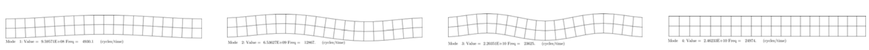


手順2-2：FEMによる周波数応答解析

- 結果を表示する.
  - 固有値解析(固有振動数とモードベクトル)
    - 各固有値に対するモードベクトルを確認する.



はりのモード関数



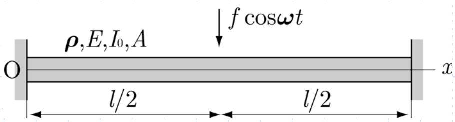
モードベクトル

手順3-1：FEMによる強制振動

- 両端固定はりの中央部に大きさf，角振動数ωの集中調和外力が作用する強制振動の解を，考慮するモード次数を変化させたモード重ね合せ法により求め，理論解および直接法による解比較する．
- 各入力ファイル（ex61.inp~ex64.inp）を編集する．
  - 考慮する固有モードの次数を入力する．

ex61	ex62	ex63	ex64
1	2	3	4

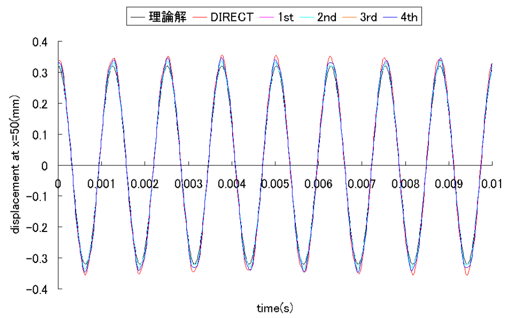
- ABAQUSを実行する．
- 結果を表示する．
  - 中央部の変位の時刻歴応答を確認．（理論解・直接法による解との比較）



Mechanical Design & Analysis Co.

手順3-2：FEMによる強制振動

- 結果を表示する．
  - 変形図
  - 変位の時刻歴応答（理論解がex6.xlsに書いてあります．）



中央部の変位の時刻歴応答