

vol.97-1

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

May 1997



後三年合戦絵詞（部分）

## 【特集】 接触による応力の集中と減衰

— 半無限要素の適用と JIS ゴム硬度試験への応用 —

**FEM** Consulting Services for Engineering Practice  
URL <http://www.mech-da.co.jp>



# 【特集】 接触による応力の集中と減衰

## - 半無限要素の適用と JIS ゴム硬度試験への応用 -

### 1. 接触による応力の集中

歯車や転がり軸受のように曲率を持った面同士が接触すると、その近傍では局部的に高い応力が発生します。この問題は古くは Hertz の応力問題として知られ、荷重の増加によって接触領域が非線形的に拡大すること、またミゼス相当応力の最大値が接触表面ではなく物体内部に発生するため、はく離のような特殊な損傷形態を示すことが明らかになっています。

この Hertz 応力に関しては弾性論による解<sup>\*1</sup>が広く知られている以外に、FEM を用いて精度の高い結果を得ることができます<sup>\*2</sup>。従って実用的な興味は、その精度を損なわずに解析の簡略化を図る点にあります。特に接触による応力集中が距離と共に減衰し、どこまで離れば無視できるかという問題は、解析モデルの規模に直接影響するため、重要な課題です。

しかしこの局所応力の減衰、すなわち Saint-Venant の原理による応力の拡散の問題は、条件によって程度が異なります。例えば球面同士の接触の場合は、生ずる変位の 90% は接触領域の半径の 7 倍に収まるというような知見がありますが、それ以上に一般性のある結論ではありません<sup>\*3</sup>。

このような課題に対処するために、ここでは MARC<sup>\*4</sup> プログラムに搭載されている半無限要素を利用し、応力の減衰を適正なモデルの規模で解析することを試みました。

### 2. 半無限要素の適用

従来、無限領域を表現する手法としては種々のものが提案されています。この内 FEM で広く使用されている減衰型の半無限要素は、通常の有限要素に結合することによって、その接続面以遠の変位を 0 に減衰させる機能を持ちます。この減衰を表現するには、無限遠において変位を 0 とするような内挿関数を使用することが一般的ですが、ここでは MARC の中で使用されている例を中心に説明します。

#### 2.1 半無限要素の内挿関数

まず、中間節点を持つ通常の 2 次のアイソパラメトリック要素について考えてみましょう。隅節点を P, R, 中間節点を Q とすると、要素内の変位の分布は、節点変位 ( $u_P, u_Q, u_R$ ) と形状関数 ( $N_P, N_Q, N_R$ ) を用いて (1-1) 式のように表せます。また、形状関数は要素内の分布形状を補完する機能を持ち、(1-2) 式のように定式化されています。

$$u = (N_P N_Q N_R) \begin{bmatrix} u_P \\ u_Q \\ u_R \end{bmatrix} \cdots \cdots (1-1)$$

$$\begin{aligned} N_P &= -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi \\ N_Q &= (1-\xi^2) \\ N_R &= \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \end{aligned} \cdots \cdots (1-2)$$

Fig.1-1 に示すように、各点の形状関数の値は当該の点において 1、その他の点においては 0 となり、またこれらの形状関数の和 (内挿関数と呼びます) は領域内で 1 となるように定義されています。アイソパラメトリックという名称は、この補完のための関数を座標値に対しても、また変位に対しても同一に適用する取扱いに由来しています。

以上に述べたような有限要素の考え方は、要素座標系という有限の領域で数値積分を行うことを前提としています。半無限要素では、実座標系において無限遠の条件を表す必要があるため、まずこの有限の要素座標系に対して矛盾の無い写像の方法を与えることから検討する必要があります。簡単のために、Fig.1-2 に示すような x 軸方向の線分 CPQ に沿った 1 次元の写像を考えてみましょう。実座標 x と要素座標  $\xi$  の関係として (1-3) 式を考えます。

$$x = \frac{\xi}{1-\xi}x_c + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_q \cdots \cdots (1-3)$$

ここで  $\xi = -1$  のとき  $x = \frac{x_q + x_c}{2} = x_p$   $\xi = 0$  のとき  $x = x_q$   $\xi = 1$  のとき  $x = \infty = x_r$  に対応しています。これによって  $\xi = -1$

のときは点 P を、 $\xi = 0$  のときは点 Q を表し、また  $\xi = 1$  では無限遠の点 R が表現できることがわかります。

次に、形状関数を考えましょう。(1-4) 式のような定式化をすると、その挙動は Fig. 1-3 のようになります。点 P と点 Q に対する形状関数  $N_P$  と  $N_Q$  は、それぞれの点に対して 1、他の点においては 0 となり、通常の要素の扱いと同じです。これに対して、 $N_R$  は点 R において変位が 0 となるように 0、また他の点においても影響が現れないように 0 であり、かつ、 $N_P + N_Q + N_R$  が点 Q から点 R に向かって滑らかに減衰するように工夫されています。以上のような扱いをすることによって有限の領域に作成した節点を用いて、半無限の領域を表現することが可能となります。

$$N_P = -\frac{0.5(1-\xi)(\xi_q - \xi)\xi}{1+\xi}, \quad N_Q = -\frac{(1-\xi^2)\xi}{(1-\xi_q^2)\xi_q}, \quad N_R = \frac{(1-\xi^2)(\xi_q - \xi)}{\xi_q} \cdots \cdots (1-4)$$

ただし  $\xi_q = 2\frac{x_q - x_p}{x_r - x_p} - 1$

尚、点 Q の位置を調整することによって半無限要素内での変位の減衰の程度を制御することが可能です。例えば Q を P に近づければ変位は急激に減衰し、逆に R に近づければ緩やかに減衰します。但し応力の拡散の具合は条件によって異なるので、実際の問題に適用する際は半無限要素の節点位置を変えて解析を試行し、落ち着いた解が得られていることを確認するのが安全です。

概略の目安としては、接触領域の3～5程度の領域を切り出し、その周囲に半無限要素を配置するのが良いでしょう。また、減衰の程度を均等にするために、次の例題に示すように応力拡散の中心から同等の径で切り出したモデルにすると良い解が得られます。

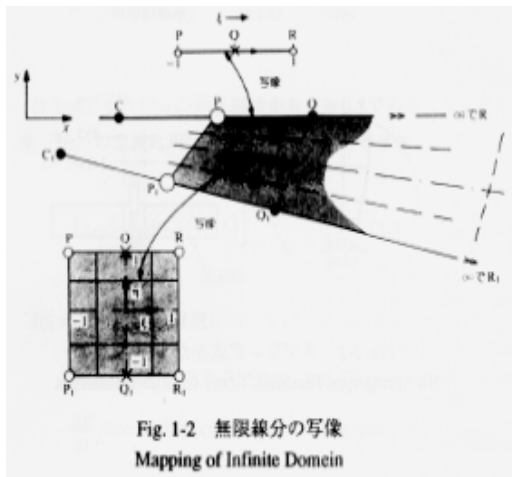


Fig. 1-2 無限線分の写像  
Mapping of Infinite Domain

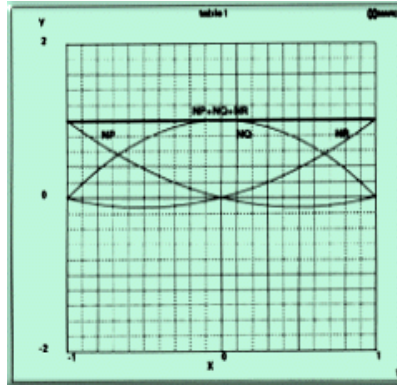


Fig. 1-1 形状関数 (通常の2次要素)  
Shape Function (Ordinary 2nd Order Element)

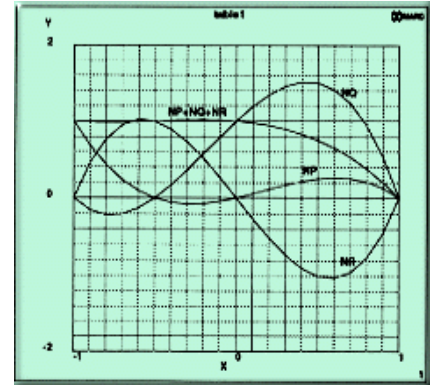


Fig. 1-3 形状関数 (半無限次要素)  
Shape Function (Semi-infinite Element)

## 2.2 適用例

Fig. 1-4 に示す様な軸対称の弾性半無限空間に点荷重が負荷する問題 (Boussinesq 問題) に対して、半無限要素を適用した例を示します。解析条件は以下の通りとし、周辺を固定した条件、および半無限要素を用いた条件について検討します。この問題に対して、Z 軸上の垂直変位  $w$  の厳密解は (1-5) 式で与えられます。Fig. 1-4 に示すように、周辺を固定した条件では厳密解に対して硬い結果を与えますが、半無限要素を適用することによって大幅な改善が得られることがわかります。

縦弾性係数  $E = 1.0$   
 ポアソン比  $\nu = 0.1$   
 点荷重  $P = 1.0$

$$W = \frac{1+\nu}{2\pi E} \cdot \frac{1}{z} \cdot \{2(1-\nu) + 1\} \cdot P \cdots \cdots (1-5)$$

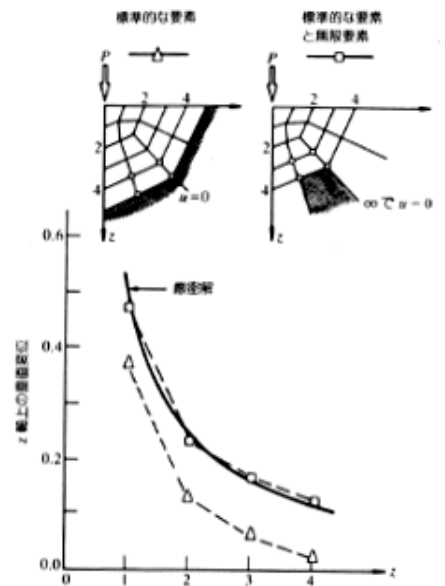


Fig. 1-4 軸対称弾性半面上の点荷重 (Boussinesq 問題)  
Point Load on Axisymmetric Half-space

## 3. ゴムの硬さ試験

### 3.1 JIS 規格の概略

ゴム材料の FEM 解析では、その非圧縮かつ非線形な弾性挙動を表現するために、Mooney または Ogden といったエネルギー関数形の定式化が用いられます。JIS K6301 (加硫ゴムの物理試験方法) には、ダンベル形の試験片を用いた引張試験の規格があり、その結果を用いてこれらの材料定数を求めることが可能です。

しかし、配合によって特性の異なる個々のゴム材料に対して、この引張試験を実施するのは現実的ではありません。代わりに、同じ JIS 規格に定められた硬さ試験によって、ゴムの弾性を評価することが広く行なわれています。ここでは、この硬さ試験の内容を見直し、FEM 解析に反映する方法を検討してみました。

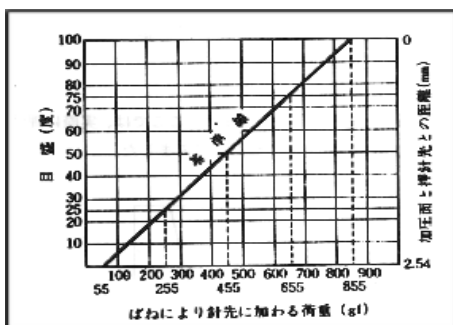


Fig. 2-2 パネ特性  
Spring Diagram

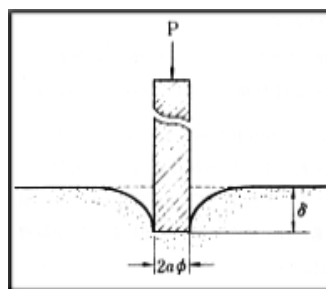


Fig. 2-3 円柱形針の圧入  
Flat-ended Cylindrical Punch

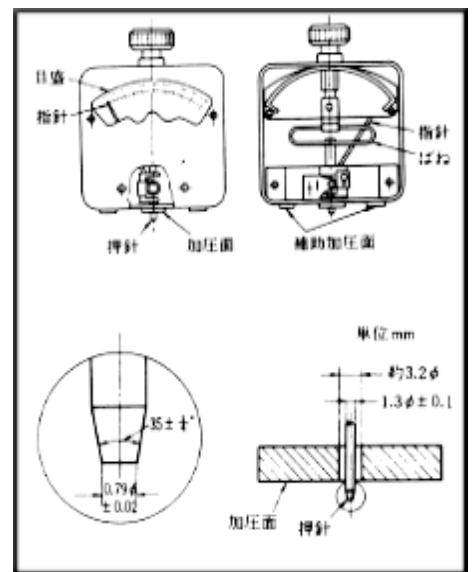


Fig. 2-1 スプリングかたさ試験機  
JIS Spring-type Hardness Tester Ruber Materials

Fig.2-1 は硬さ試験に用いられるスプリング式の試験機を示します。この試験機はバネによって支持された押針を内蔵しています。試験機の底面をゴム材に押し当てると、Fig.2-3 に示すようにバネ力によって押針は材料中に圧入します。当然柔らかい（硬度の小さい）ゴムほど、圧入量は深くなります。

Fig.2-2 は JIS の A 型試験機におけるバネの荷重と変位の関係を示します。摩擦に対抗するために、バネには  $P=0.055\text{kg}$  の予圧縮力が与えられており、バネ定数は  $k=3.15\text{kg/cm}$  です。また試験機底面からの押針の突出量は  $H=0.254\text{cm}$  です。試験機には 0 ~ 100 の目盛がふってあり、押針の変位が 0（ゴムが完全に柔軟なとき）には目盛 0、また押針の変位が  $0.254\text{cm}$  のとき（ゴムが完全に剛なとき）には目盛 100 を指すようになっています。この指針が指す量をゴムの硬度と称します。

### 3.2 硬度と弾性係数の関係

硬さ試験を弾性論の立場から考察してみましょう。まずゴムが Hooke の法則に従うものと仮定すると、Fig. 2-3 において、針の圧入深さは (2-1) 式のようにになります。また、前述の予圧縮力を考慮したバネの特性は、(2-2) 式のように与えられます。

$$\delta = \frac{1-\nu}{4aG}P \quad \dots \dots (2-1) \quad \delta : \text{圧入深さ}, \quad \nu : \text{ポアソン比}, \quad 2a : \text{円柱針の直径},$$

$$P = P_0 + k(H - H_0) \quad \dots \dots (2-2) \quad G : \text{横弾性係数}, \quad P_0 : \text{針に働く荷重}, \\ k : \text{バネ定数}, \quad P : \text{予圧縮力}, \quad H_0 : \text{押針初期突出量}$$

(2-2) 式、またゴムの非圧縮性から  $\nu = 0.5$  であることを利用すると (2-1) 式は (2-3) 式のようにになります。更にこの関係を硬度 ( $H_s$ ) の定義に用いると、(2-4) 式が得られます。

$$\delta = \frac{1}{8aG}[\Delta P + k(H - \delta)] \quad \dots \dots (2-3) \quad H_s = \left(1 - \frac{\delta}{H}\right) \times 100 = \frac{G - \left(\frac{\Delta P}{H} / 8a\right)}{G + (k/8a)} \times 100 \quad \dots \dots (2-4)$$

JIS の A 形硬さ試験機については、以下の量が与えられています。

$H=0.254\text{cm}$ ,  $P=0.055\text{kg}$ ,  $k=3.15\text{kg/cm}$ ,  $8a=0.406\text{cm}$  (平均径を  $2a$  とする)

$$\frac{\Delta P}{H} / 8a = 0.53\text{kg/cm}^2, \quad k/8a=7.77\text{kg/cm}^2 \quad \dots \dots (2-5)$$

上記の値からわかるように、(2-4) 式の右辺の分子第 2 項は小さいのでこれを無視し、更に  $G_{50}=k/8a$  と書くことにすると (2-4) 式は以下のような簡単な形になります。

$$H_s = \frac{G}{G + G_{50}} \times 100 \quad \dots \dots (2-6)$$

ここで  $G=G_{50}$  (定数) のゴムを考えると  $H_s=50$  となるので、 $G_{50}$  という定数は硬さが 50 を示すゴムの横弾性係数ということになります。

Fig.2-4 は実用ゴムについて  $H_s$  と  $G$  の関係を整理した一例を示します。

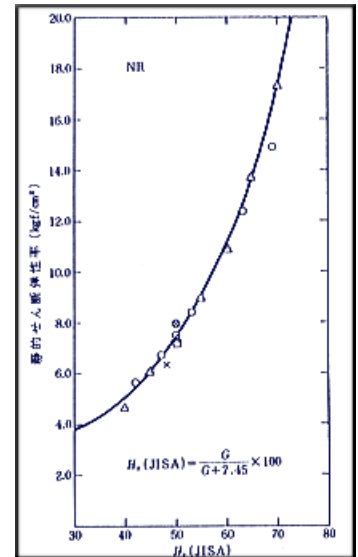


Fig.2-4 ゴムの硬度  $H_s$  と横弾性係数  $G$  の関係  
Hardness vs. Shear Modulus for Typical Rubber

### 3.3 FEM 解析

以上の知見を用いると、ゴムの硬度  $H_s$  を測定することによって弾性係数を知ることができます。ここでは、実際に弾性係数を与えて FEM 解析を行い、得られた変位量から硬度を求めて、Fig.2-4 と一致するか検討してみました。

Fig. 2-5 にモデル形状を示します。軸対称要素を用いてメッシュ分割しました。試験機は加圧面の接触半径に比べて十分に大きいと仮定しているので、メッシュの端部にあたる要素には半無限要素を使用しました。試験機の押圧面と押針に相当する部分は必ずしもモデル化する必要はありませんが、わかり易いよう

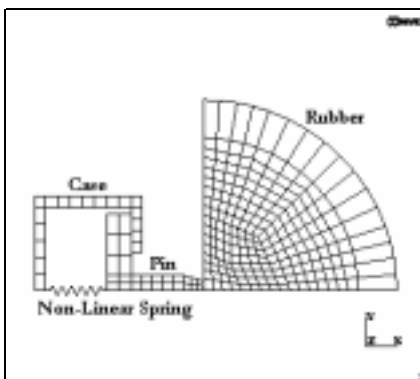


Fig.2-5 解析モデル  
FEM Model for Spring-Type

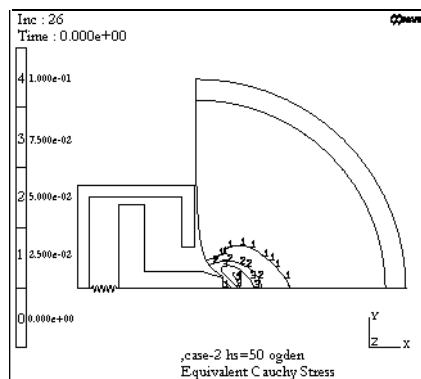


Fig.2-6 相当応力の分布  
Equivalent Stress Distribution

G [kg/cm <sup>2</sup> ]	Theory	ISOTROPIC	OGDEN
4.97	40	37.9	39.4
7.45	50	48.7	49.9
17.4	70	70.0	68.1

にメッシュ分割しています。押針の先端とゴムの表面の節点は TYING で結びました。CONTACT のような接触機能を用いても構いませんが、メッシュの精粗によって節点の貫通のコントロールが必要となるなど煩雑なので、使用していません。

(2-2) 式ないしは Fig.2-2 に示したような予圧縮力を持つバネの特性はユーザ・サブルーチン USPRNG を用いてモデル化しました。ゴムには、Table2-1 に示すような横弾性係数を想定し、これを等方性材料及び Ogden モデルの 2 通りでモデル化しました。このとき Ogden モデルに対しては、 $E=3G$  相当の直線的な単軸の応力 - ひずみ関係を示すような定数を、MARC に付属する CURVE プログラムを用いて設定しています。経験的に、Ogden モデルでは 100% 程度、Mooney モデルでは 500% 程度の引張ひずみまでは直線的な応力 - ひずみ関係を与えることができます。Fig. 2-6 では応力の最大値は約 0.1 であり、これはひずみ量で約 50% に相当します。材料の内部で相当応力が最大値を示すという接触応力の特徴が現れています。

Table2-1 に示すように、FEM の解析結果は理論解と良く一致しています。すなわち、この程度のひずみ量の問題であれば、硬度によって定めた弾性係数を用いて解析しても、大過ない結果となることがわかります。

#### 参考文献

1. 強度設計データブック, 裳華房, 1994.
2. 接触による応力集中, Mech D&A News, Vol.95-1, (株)メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス, 1995.
3. Roark's Formulas for Stress & Strain, McGraw-Hill, 1989.
4. MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。
5. O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor, マトリックス有限要素法, 第 4 版, 科学技術出版社, 1996.
6. 加硫ゴムの物理試験方法, JIS K6301, 日本規格協会, 1996.
7. 改訂新版, 防振ゴム, (社)日本鉄道車輛工業会, 1975.