

vol.97-3

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

October 1997



京都 大覚寺大沢池

## 【特集】 弾塑性材料試験 支援キット

べき乗則による同定／ひずみ速度依存性への応用

**FEM** Consulting Services for Engineering Practice  
URL <http://www.mech-da.co.jp>



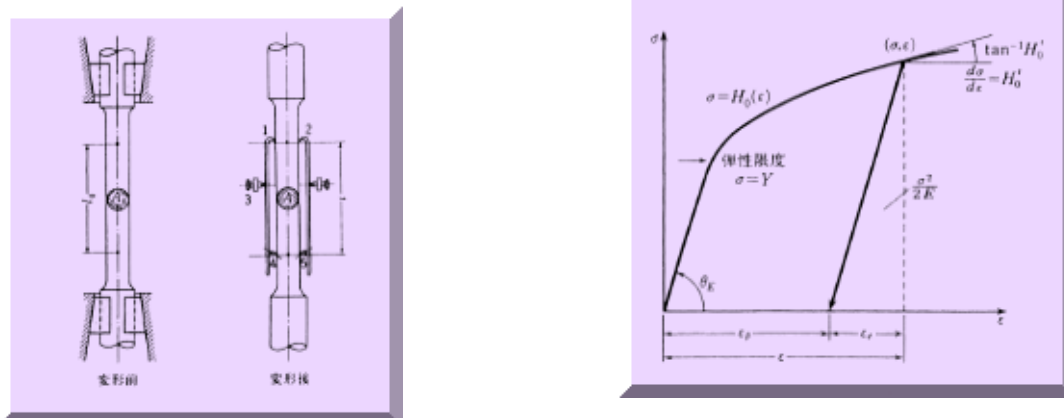
## 1. はじめに

FEM を用いて弾塑性問題を扱う場合、最初に克服すべき課題は材料データの準備です。実業の分野では、十分な信頼性の下に引張試験のデータを取得することは、多くの支出を伴います。また、温度依存性やひずみ速度依存性を有する高度な弾塑性解析を運用しようとする場合には、単なる応力 - ひずみ関係のプロットだけでは使い勝手が悪く、曲線近似などの手法を用いた数値化が必要となります。

ここでは皆様が引張試験のデータを取得されたとして、MARC\* などの非線形プログラムの入力データとして利用してゆくまでの手順を御紹介します。尚、本稿の作成にあたっては、山田嘉昭先生の「マトリクス法材料力学」\*\* を広く参照させて頂きました。

## 2. 引張試験

引張試験では、適当な形の引張試験片を Fig. 1-1 のようにつかみ、引張試験機にかけて、その平行部に生じるほぼ一様な応力の下での、性質を調べます。Fig. 1-2 は引張試験で得られる応力 - ひずみ曲線の例を示します。



図において、縦軸は平行部の均一な応力、横軸は伸びひずみを表し、それぞれ次のように定義されます。

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad P: \text{荷重}, \quad A: \text{平行部断面積} \cdots \cdots (1), \quad \epsilon = \ln \frac{l}{l_0}, \quad l_0, l: \text{標点間の変形前後の長さ} \cdots \cdots (2)$$

(1) 式の \$A\$ は、各変形段階における平行部の断面積、すなわち最初の断面積でなく、荷重 \$P\$ のもとでの変形後の値を示し、真応力 (true stress) と呼ばれます。また (2) 式の \$\epsilon\$ は対数ひずみ (logarithmic strain) と呼ばれるひずみです。ひずみが大きくなると、次の式で定義される工学ひずみ \$e\$ (conventional strain) との差が大きくなります。

$$e = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad \epsilon = \ln(1 + e) \cdots \cdots (3)$$

Fig.1-2 において、応力 \$= Y\$ の点は弾性限度、\$Y\$ は引張の降伏応力を表します。応力 が \$Y\$ に達するまでの間、材料は弾性的に挙動し、応力 とひずみ の間に次の比例関係 (フック則) が成立します。(4) 式の比例係数 \$E\$ を縦弾性係数またはヤング率といいます。

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \approx \frac{\sigma}{\epsilon} = E \cdots \cdots (4)$$

Fig. 1-2 において応力 が \$Y\$ をこえると材料に塑性変形が現れ、全体のひずみ が弾性成分 \$e\$ と塑性成分 \$p\$ とからなるようになります。すなわち、

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad \epsilon_e = \frac{\sigma}{E} \cdots \cdots (5)$$

(5) 式に見られるように、全体ひずみ のうち弾性成分 \$e\$ に対しては、(4) 式と同じフック則が成立します。弾性成分 \$e\$ は回復可能なひずみであって、Fig. 1-2 に見られるように、除荷の過程で 0 の値に戻ります。塑性成分 \$p\$ は、このとき残留する永久的なひずみに相当します。

弾性解析では、材料を等方性とするれば、縦弾性係数 E とポアソン比 のデータがあれば十分です。しかし弾塑性解析まで実行しようとするれば、Fig. 1-2 において弾性限度を超えたところの応力 - ひずみ曲線を表示する関係式が必要です。いまこれを以下のように表します。ここで Et を接線係数と呼びます。

$$\sigma = H_0(\epsilon), \quad \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad Y \dots \dots (6) \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon} = H'_0(\epsilon) = E_t \quad (\text{とおく}) \dots \dots (7)$$

全ひずみ から弾性成分 を取り除き、塑性ひずみ に対して応力 - ひずみ曲線を描いた例を Fig. 1-3 に示します。この線図を次のように表します。

$$\sigma = H(\epsilon_p), \quad \epsilon_p = \epsilon - \epsilon_e \dots \dots (8) \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = H'(\epsilon_p) \dots \dots (9)$$

Fig. 1-3 の応力 - ひずみ曲線のこう配 H は、塑性ひずみ によって材料が硬化する様子を示し、加工硬化係数と呼ばれています。MARC に限らず一般の二軸あるいは三軸応力状態のもとでは、この H' を適用することが大半です。従って、H' を塑性ひずみ の関数として表示しておく便利です。もし弾性成分を含む (6) 式について Et が得られている場合には、次のようにして H' に換算することが出来ます。

(5) 式の微分形、すなわちひずみ増分に関する関係は (10) 式のようになり、更に (7) 式と (9) 式により、d と d\_p を応力増分 d で表示すると (11) 式が得られます。

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p = \frac{d\sigma}{E} + d\epsilon_p \dots \dots (10) \quad \frac{d\sigma}{E_t} = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H'} \quad \text{ゆえに } H' = \frac{EE_t}{E - E_t} \dots \dots (11)$$

MARC の WORK HARD オプションで入力する加工硬化係数は、以上の H' に相当します。

### 3. べき乗則による同定

Fig. 1-3 の応力( ) - 塑性ひずみ( )曲線の実験式、すなわち (8) 式の表示として、以下の 2 つの式がよく用いられます。

$$\sigma = Y + c\epsilon_p^n, \quad H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = nc\epsilon_p^{n-1} \dots \dots (12)$$

$$\sigma = c(a + \epsilon_p)^n, \quad H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = nc(a + \epsilon_p)^{n-1} \dots \dots (13)$$

(12) 式において Y は降伏応力を表し、(13) 式では can = Y となります。いずれの式も n=1 のとき、直線に退化します。金属材料では、n の値は 0.05 ~ 0.60 の間にあるのが普通です。したがって 0 の極限において p^{n-1}、すなわち (12) 式では加工硬化係数 H' が弾性限度 p = 0 において無限大のこう配を持つ欠点があります。

従って、近似式としては (13) 式の適用が望ましいのですが、3 つの定数値 a, c, n を求める必要があり、やや面倒です。今回のキットでは、以下のような手順でこれらを求めるプログラムを作成しました。

#### 3.1 パラメータ a の決定

まず、Fig. 1-3 のように - p 線図を描きます。次に公比 r の等比級数列をなす 0, 1=r 0, 2=r^2 0, 3=r^3 0, すなわち 4 つのレベルの応力を選び、図からこれに対応するひずみ 0, 1, 2, 3 の値を読みとります。こうして得たひずみ値を用いて

$$a = \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3}{(\epsilon_1 + \epsilon_3) - 2\epsilon_2} \dots \dots (14)$$

により、パラメータ a を求めることができます。今回のキットでは、入力値から 0 と 3 をまず設定し、その比率から公比 r を求めました。r を定めると 1, 2 がわかるので、応力とひずみの入力値から線形補完により 1 と 2 を求め、(14) 式を計算させました。なお、(14) 式が成立することは次のようにしてわかります。

$$\sigma_0 = c(a + \epsilon_0)^n, \quad \sigma_1 = r \sigma_0 = c(a + \epsilon_1)^n, \quad \sigma_2 = r^2 \sigma_0 = c(a + \epsilon_2)^n, \quad \sigma_3 = r^3 \sigma_0 = c(a + \epsilon_3)^n$$

両辺の対数を取り、引算を行えば (15) 式、更に (16) 式が得られます。

$$\frac{1}{n} \log_{10} r = \log_{10} \frac{a + \epsilon_1}{a + \epsilon_0} = \log_{10} \frac{a + \epsilon_2}{a + \epsilon_1} = \log_{10} \frac{a + \epsilon_3}{a + \epsilon_2} \dots \dots (15) \quad \frac{a + \epsilon_1}{a + \epsilon_0} = \frac{a + \epsilon_2}{a + \epsilon_1} = \frac{a + \epsilon_3}{a + \epsilon_2} \dots \dots (16)$$

(16) 式の 2 番目の等式をパラメータ a について解けば (14) 式が得られます。尚、(16) 式の比例関係を用いると

$$\frac{1}{n} \log_{10} r = \log_{10} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_0} = \log_{10} \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \dots = \Delta \log_{10}(\Delta \epsilon_p) \dots \dots (17)$$

となります。実験式 =c(a+ p)^n が成立するためには、公比 r の等比級数列をなす応力 0, 1, \dots に対して求めた 0, 1, \dots から、(17) 式によって得られる log10( ) の値が十分な精度で一致していることが必要です。以上によりパラメータ a が定まると、残りの定数 c と n の決定は、 =c p^n のパラメータを定める問題に帰着します。

### 3.2 パラメータ c, n の決定

$c = \sigma_p^n$  の関係は、両対数グラフに次の直線関係として表示されます。

$$\log_{10} \sigma = \log_{10} c + n \log_{10} \epsilon \quad \dots \dots (18) \quad \text{または} \quad y = \log_{10} c + nx \quad \dots \dots (19)$$

x と y はそれぞれ、対応するひずみ  $\epsilon$  および応力  $\sigma$  の常用対数値を表します。得られた測定値の組を

$$(x_1 = \log \epsilon_1, y_1 = \log \sigma_1), \dots \dots, (x_N = \log \epsilon_N, y_N = \log \sigma_N) \quad \text{一般に} \quad (x_i = \log \epsilon_i, y_i = \log \sigma_i)$$

とすると、最小二乗法により、実験結果に直線式 (19) を当てはめる問題は、N 個の測定値の組からえられる次の二乗和が最小となるよう、 $\log_{10} c$  と n を決定する問題に帰着します。

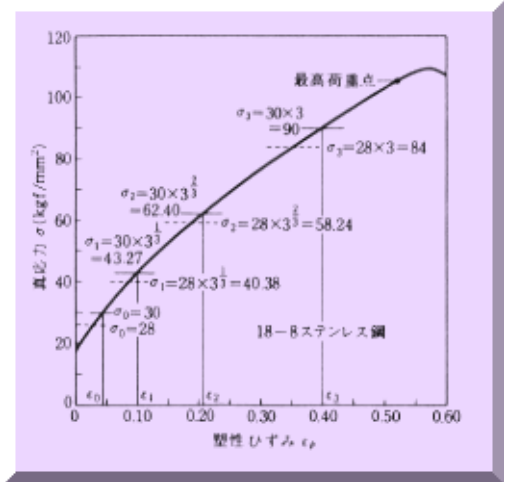
$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \log_{10} c - nx_i)^2 \quad \dots \dots (20)$$

二乗和 S の最小条件は  $\frac{\partial S}{\partial (\log_{10} c)} = 0, \frac{\partial S}{\partial n} = 0$

この微分を実行すれば

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \log_{10} c - nx_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i (y_i - \log_{10} c - nx_i) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{あるいは} \quad N \log_{10} c + \left( \sum x_i \right) n &= \sum y_i \\ \left( \sum x_i \right) \log_{10} c + \left( \sum x_i^2 \right) n &= \sum x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (21)$$



$x_i$  と  $y_i$  は測定データから計算することができ既知です。(21) 式を  $\log_{10} c$  と n について解けば最終的に、(12) 式を決定することができます。

### 3.4 適用例

#### 4.1 基本例

Table2-1 に入力データの例を示します。このプログラムでは、引張試験機の荷重と変位の読みを入力データとしています。読みには必要に応じて係数を乗ずることが可能であり、この例では変位について 0.08 倍を乗じて実際の値とするようにしています。

また試験片の断面積 (厚 × 幅)、標点間距離および縦弾性係数を入力します。単位系は任意ですが、ここでは慣用的に kg と mm

としました。これらの値を用いてプログラムは公称応力 - 工学ひずみ、更に真応力 - 対数ひずみを計算します。真応力  $\sigma$  は、公称応力  $s$  と工学ひずみ  $e$  から体積一定の条件の下で計算します。すなわち、

$$sA_0 / A = s l / l_0 = s(1+e)$$

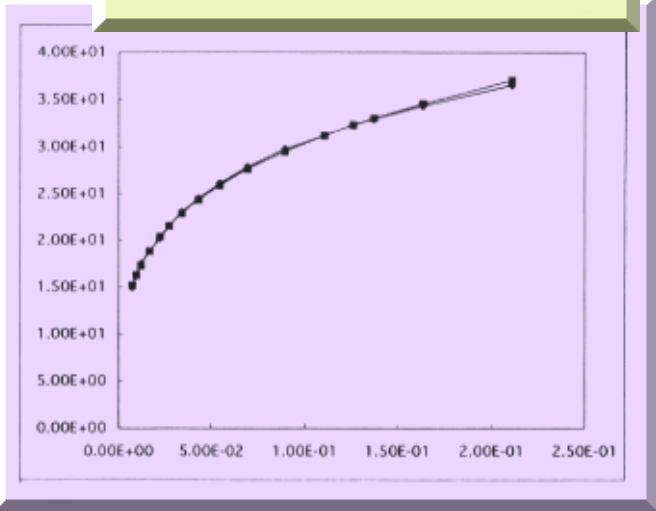
Table2-2 は出力結果です。(13) 式に対応して、下記の数値が求められました。

$$\begin{aligned} a &= 0.1 \times 10^{-3} [-] \\ c &= 0.558893 \times 10^2 \text{ [ kg/mm}^2 \text{ ]} \\ n &= 0.26553 [-] \end{aligned}$$

ここで使用したデータは、ひずみの最大値が約 20% であり、応力は単調に増加します。(17) 式に示したべき乗則の適用条件を

Table2-2 出力例	
NO. 1	
16 DATA	
INITIAL VALUES	
AREA = .202766E+02	
THICKNESS = .811000E+00	
WIDTH = .250020E+02	
LENGTH = .500000E+02	
LOAD FACTOR = .100000E+01	
ELONGATION FACTOR = .800000E-01	
YOUNG'S MODULUS = .210000E+05	
YIELD STRESS = .484410E+01	
STRESS = .558893E+02	
*(.100000E-03+PL.STRAIN)	
**.26553	

Table 2-1 入力データの例		
1,16,	データ番号	データの個数
1.0, 0.08,	荷重の倍率	変位の倍率
0.811, 25.002,	最初の板厚	最初の幅
50.0,	標点間距離	
21000.0,	縦弾性係数	
300.0, 5.0,		
325.0, 6.4,		
350.0, 8.0,		
375.0, 11.0,		
400.0, 14.7,		
425.0, 18.0,		
450.0, 22.5,		
475.0, 28.5,	試験機の読み	
500.0, 36.0,	(荷重, 変位)	
525.0, 46.0,		
550.0, 59.5,		
565.0, 74.0,		
575.0, 85.0,		
580.0, 93.0,		
590.0, 112.0,		
598.0, 148.0,		



十分に満たしており、 $\log_{10}(\dots)$  のばらつきは約 10% でした。この結果、入力データと近似解は、Fig. 2-1 に示すように良好な一致を示します。

Table2-1 に示したデータは、参照させて頂いた図書 \*\* からの引用であり、c, n のパラメータ決定のルーチンと共に横内康人先生の作成によるものです。

## 4.2 ひずみ速度依存性への応用

MARC ではユーザサブルーチン WKSLP を用いて、(13) 式の  $\sigma$  と  $H'$  を直接定義することが出来ます。この機能を利用すると、ひずみ速度依存性を持った加工硬化特性を容易にモデル化できます。例えば、Table2-1 で使用した値が  $\dot{\epsilon}_p = 20$  [sec<sup>-1</sup>] の一定ひずみ速度の下で測定された結果であるとしましょう。また簡単のために、この荷重データに 0.5 を乗じた結果が  $\dot{\epsilon}_p = 1$  [sec<sup>-1</sup>] で得られた結果であるとします。a, c, n の同定結果は Table3-1 の通りとなります。

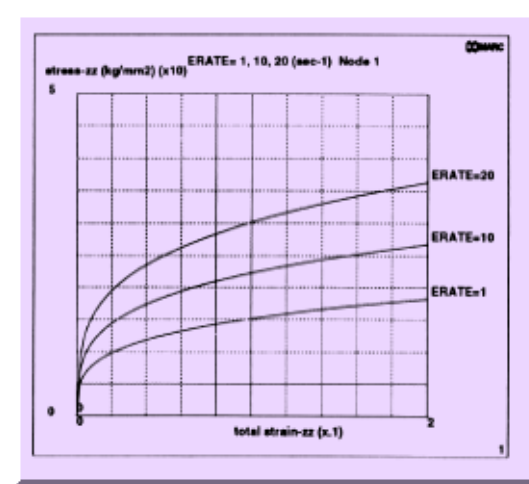
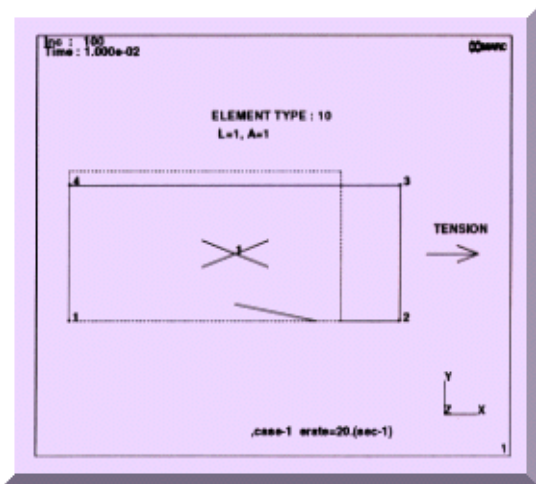
乱暴な扱いですが、a, c, n が  $\dot{\epsilon}_p$  に対して直線的に変化するとして WKSLP をコーディングしました。Fig. 3-1 に示す単軸引張モデルを用いて解析した結果を Fig. 3-2 に示します。 $\dot{\epsilon}_p$  として 1, 10, 20 [sec<sup>-1</sup>] に対する曲線を示しています。

なお、 $\dot{\epsilon}_p$  は対数ひずみの変化率であるので、これが一定となるようにするには変位  $\Delta l$  の変化を以下のように与える必要があります。但し、弾性ひずみは無視しています。ここではユーザサブルーチン FORCDT を用いて、変位増分  $d\Delta l$  を与えるようにしました。

$$\epsilon = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) \text{ より } \dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{l}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}} \frac{d\Delta l}{dt}$$

$$\therefore d\Delta l = \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) \dot{\epsilon} dt$$

$\dot{\epsilon}$ [sec <sup>-1</sup> ]	a [-]	c [kg/mm <sup>2</sup> ]	n
20	$0.1 \times 10^{-3}$	$0.559 \times 10^2$	0.266
1	$0.1 \times 10^{-3}$	$0.281 \times 10^2$	0.269

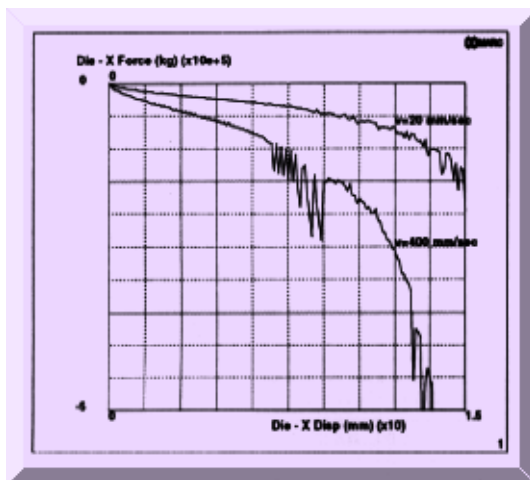
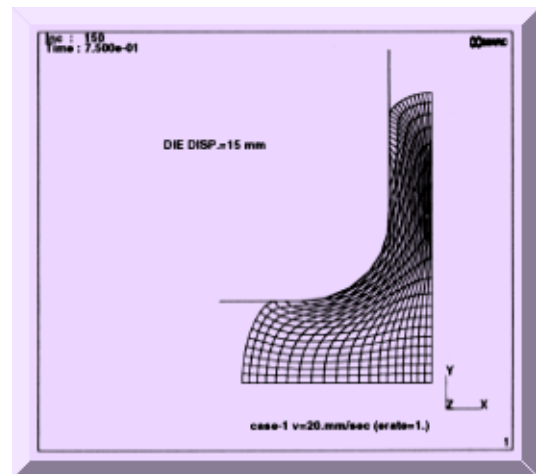
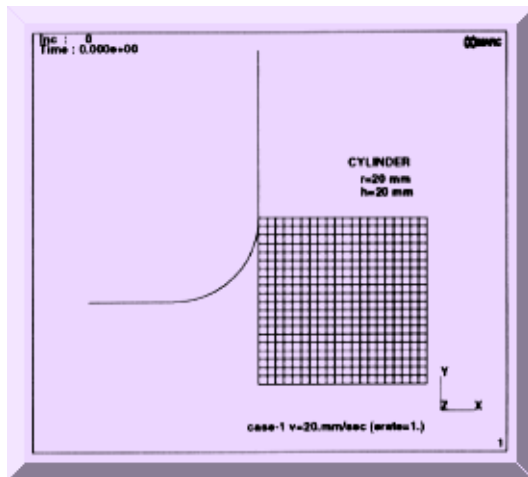


## 4.3 鍛造解析への応用

4.2 で定めたひずみ速度依存性のデータを用いて、鍛造解析を行ってみました。Fig. 4-1 に示すような軸対称モデルにより、半径 20mm、高さ 20mm の円筒を金型で圧下します。Fig. 4-2 に変形図を示します。

御承知のように MARC の CONTACT 機能では、剛な金型に速度を与えて変位させます。ここでは、速度を 20mm/sec と 400mm/sec の 2 種類について検討しました。円筒の高さが 20mm であるので、平均的なひずみ速度として 1sec<sup>-1</sup> と 20sec<sup>-1</sup> を想定した結果です。

Fig. 4-3 に金型の荷重 - 変位線図を示します。変形形状には大差がありませんでしたが、荷重の水準はひずみ速度によって大きく異なることがわかります。



- \* MARC は日本マーク株式会社殿の製品です。
- \*\* 山田, 有限要素法の基礎と応用シリーズ2, マトリックス法材料力学, 培風館, 1980.  
表紙: 京都 大覚寺大沢池, 室田康雄, 世界文化フォト.