

vol. 2005-4

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

December 2005



Pierre-Auguste Renoir, On the Terrace, 1881.

【特集】 粘弾性解析における諸問題 (その3 一般化Maxwellモデルの同定)

*FEM Consulting Services for Engineering Practice
Find Innovation in Tradition 2008-2019*

【 1 】 はじめに

前回のニュースレターにおいて、時間-温度換算則を用いたマスターカーブの作成について説明しました^{(1),(2)}。しかしこの段階では、マスターカーブは実験結果の集合でしかないため、汎用 FEM の入力とするためには適切な数式化を施す必要があります。今回のニュースレターでは、線形粘弾性の理論を適用し、マスターカーブを一般化マックスウェルモデルで近似する方法について解説します。

一般化マックスウェルモデルの同定は Prony 級数展開と呼ばれ、指数関数の減衰の性質を利用して簡易に近似する方法が一般的でした⁽³⁾が、最新の最適化手法を適用するなど難度の高い近似計算を確実に実行できる同定ソフトウェアの開発が望まれてきました。これには、緩衝部材に代表されるような高機能樹脂素材の設計などをターゲットとして、粘弾性解析の必要性が高まってきた背景があります。今回のニュースレターでは、弊社で開発した粘弾性材料カーブフィットプログラムの考え方および適用例について紹介します。

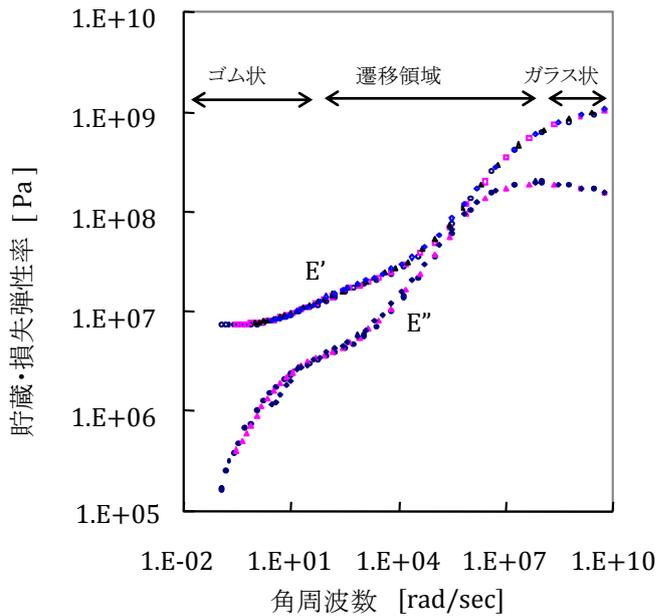


Fig.1 エポキシ樹脂のマスターカーブの例 ($T_g = -14[^\circ\text{C}]$)

【 2 】 線形粘弾性の理論 (応力緩和と動的粘弾性)

2.1 応力緩和関数

まず線形粘弾性の基本的な事項を復習します。汎用 FEM では、粘弾性材料の定義に Fig.2 に示すような一般化マックスウェルモデルと呼ばれる形式が使用されます。このモデルは複数のマックスウェルモデルを並列に配置し、材料内部の高分子鎖がもつ無限に近い運動モードを近似的に表現することを意図しています。

$$E_r(\tau) = \sigma_r(\tau)/\varepsilon_0 = E_M U(\tau) e^{-\tau/\tau_M} \quad \dots (1)$$

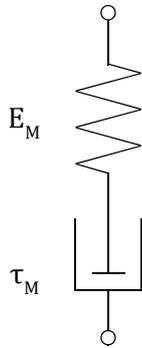
ここで、2要素からなるマックスウェルモデルは、材料の緩和特性を E_M と τ_M によって表現します。しかしこの表現は、一般的な材料に対しては単純すぎるため、Fig.2(b)に示すような N 個の 2要素マックスウェルモデルと単独スプリング要素を並列に並べたモデルが使用されます。この拡張されたマックスウェルモデルを一般化マックスウェルモデルと呼び、(2)式のように表されます。

$$E_r(\tau) = E_e + \sum_{i=1}^N E_i \exp(-\tau/\tau_i) \quad \dots (2)$$

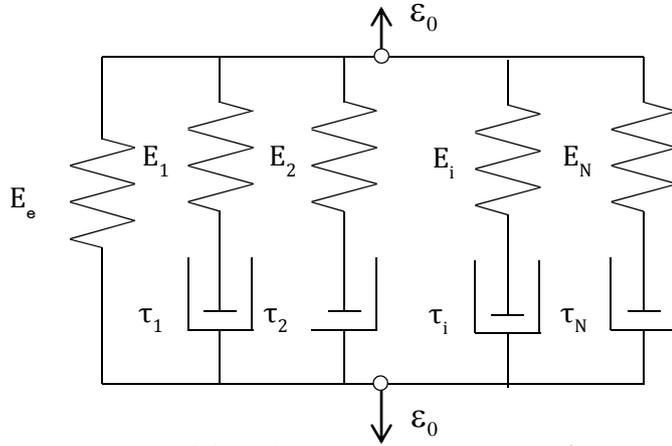
ここで、 $E_r(\tau)$ の r は応力緩和試験によって得られる物性であることを示します。式中の係数 E_e 、 E_i 、 τ_i を決定することによって、一般的な粘弾性材料を幅広くモデル化することが可能となります。なおは応力緩和試験において無限時間を経過した後に残存する弾性率を表し、Fig.1 の長時間側の領域 (ゴム状領域) における弾性率に相当します。

なお多くの汎用 FEM ソルバーでは、粘弾性材料の物性の入力に際して E_e のかわりに、瞬間的な負荷が与えられたときの弾性率 E_g を使用します。この E_g は、Fig.2(b)のモデルにおいて全てのダッシュポットが緩和を生ずる前に剛体として働く時の弾性率であり、Fig.1 における短時間側の領域（ガラス状領域）の弾性を表します。 $E_g = E_e + \sum E_i$ を用いて(2)式を書き換えれば次式が得られます。

$$E_r(\tau) = E_g - \sum_{i=1}^N (1 - \exp(-\tau/\tau_i)) E_i \quad \dots (3)$$



(a) 2要素マックスウェルモデル



(b) 一般化マックスウェルモデル

Fig.2 粘弾性材料の緩和モデル

2.2 動的粘弾性試験の応力とひずみの関係

次に、動的粘弾性試験から得られる結果について説明します。一般の動的粘弾性試験装置では、ひずみを周波数入力することによって、貯蔵弾性率 $E'(\omega)$ 、損失弾性率 $E''(\omega)$ 、損失正接 $\tan\delta$ が計測されます。このうち $E'(\omega)$ は弾性的な性質を、 $E''(\omega)$ や $\tan\delta$ は粘性的すなわちエネルギーの損失の性質を示します。これらの動的粘弾性に関する特性は入力ひずみの振幅 ϵ_0 と応答応力の振幅 σ_0 、および入力と応答の位相差 δ から次式のように算出されます。Fig.3 にこれらの入力と応答の関係を示します。

$$\begin{cases} E'(\omega) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \delta \\ E''(\omega) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta \\ \tan \delta = E''(\omega) / E'(\omega) \end{cases} \quad \dots (4)$$

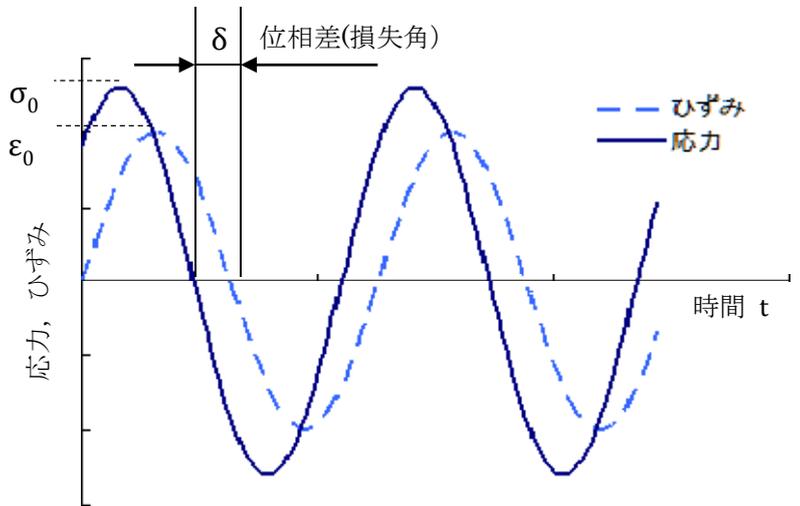


Fig.3 応力とひずみの時間波形

動的粘弾性の特性は、入力された周波数に対する応答から算出されています。そのため、一般化マックスウェルモデルのような緩和形式のモデルに帰着させるためには、この周波数に対して得られた計測結果を時間の関数に変換する必要があります。動的な粘弾性特性 $E'(\omega)$ 、 $E''(\omega)$ と緩和弾性率 $E_r(\tau)$ との関係は以下のように表されます。

$$\begin{cases} E'(\omega) = \omega \int_0^{\infty} E_r(t) \sin \omega t dt \\ E''(\omega) = -\omega \int_0^{\infty} E_r(t) \cos \omega t dt \end{cases} \quad \dots (5)$$

なお定常状態でのひずみの応答は、Fig.3からも分かるように応力に対して遅れる挙動を示します。この遅れを δ とすれば、粘弾性材料のエネルギー損失の尺度として利用される損失正接は次式のように表されます。

$$\tan \delta = E''(\omega) / E'(\omega) \quad \dots (6)$$

(3)式を(5)式に代入することによって、貯蔵および損失弾性率と一般化マックスウェルモデルの関係は、角周波数 ω の関数として次式で表すことができます。

$$E'(\omega) = E_e + \sum_{i=1}^N \frac{E_i \tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad \dots (7)$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{E_i \tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad \dots (8)$$

いま動的粘弾性の実験からは、Fig.1のような、 $E'(\omega)$ 、 $E''(\omega)$ に関するマスターカーブが得られています。(7)式と(8)式を適用して、このマスターカーブを再現できるような E_e 、 E_i 、 τ_i を推定することができれば、一般化マックスウェルモデルの係数を特定できたこととなります。以下にその手順を解説します。

2.3 数式近似における留意点

(7)式と(8)式を用いて周波数に対するマスターカーブから、時間に対する一般化マックスウェルモデルを同定するとき、注意すべきポイントは以下の3点です。

- ① E_e 、 E_i 、 τ_i は、全て正值にする。
- ② マスター曲線の横軸の桁数を上回る項数の一般化マックスウェルモデルを使用する。
- ③ 緩和スペクトルの平滑性を保つ。

① E_e 、 E_i 、 τ_i の正值化

一般化マックスウェルモデルは力学的なモデルであるので、これらの係数値は正であることが望ましいと考えられます。しかし汎用 FEM の種類によっては、これらの値に負値を許すもの、あるいは厳正に許容しないものなど様々な扱いがあり、統一的な扱いにはなっていません。経験的には、負値の項の影響によってマスターカーブが振動したりすることがあるので、(収束した近似結果が確実に得られるような手段を講じた上で) 正值となる制限を与えることが妥当です。

② 一般化マックスウェルモデルの項数

マスターカーブの横軸、すなわち周波数は対数で表示されており、10~20 桁程度の広がりを持つのが通常です。これを一般化マックスウェルモデルで滑らかに曲線近似するためには、その項数(2要素マックスウェルモデルの個数)を、この周波数の桁数と同程度以上とすることが必要とされています。これを確認するために、弾性モデル(バネ要素のみ)と2要素マックスウェルモデルを用いて、簡単な計算を行ってみました。計算条件は以下の通りです。

弾性モデル : $E = 100\text{Pa}$
 粘弾性モデル : $E_1 = 100\text{Pa}$, $\tau_1 = 1\text{sec}$

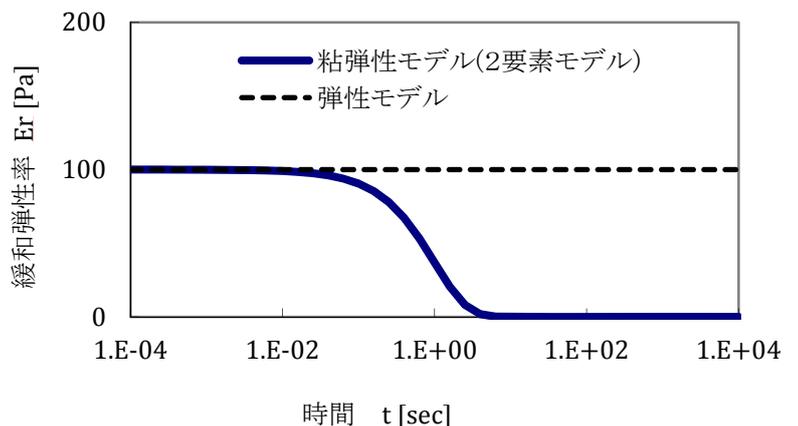


Fig.4 2要素モデルの解析例

このモデルを用いて、緩和弾性率を計算した結果を Fig.4 に示します。図中、実線で示される緩和弾性率の曲線は一桁程度の時間範囲で減衰します。すなわち一つのマックスウェルモデルが緩和を表現できる時間領域は、ほぼ一桁程度であることが分かります。

したがって一般化マックスウェルモデルにおいて、それぞれのダッシュポットにおよそ一桁ずつ異なる τ_i を与えればそれらは順次緩和し、全体の時間領域における緩和挙動を中断なく表現することができます。すなわち、マスターカーブの横軸が例えば 10 桁の時間で表現されているのであれば、一般化マックスウェルモデルの項数は 10、ないしそれ以上とすればよいことになります。

③ 緩和スペクトルの平滑性

以上の議論から、一般化マックスウェルモデルの項数の目安がわかりました。次の課題は、それぞれの項の寄与が、概ね平準化するような構成とすることです。Emri⁽⁴⁾らの知見によれば、以下のような離散化された緩和スペクトルの平滑性を保つことが、近似精度を確保する上で有効とされています。ここで δ はクロネッカの δ です。

$$H_i(\tau) = \left(\sum_{i=1}^N E_i \tau_i \delta(\tau_i - \tau) \right) \dots (9)$$

この緩和スペクトルの例を Fig.5 に示します。弊社では、この離散化されたスペクトルの包絡線を区分的な二次曲線で近似し、その曲率の変化が過大でないことをもって平滑性を維持するようにしました。詳細は参考文献^{(5),(6)}を参照してください。このような処理を施して近似計算を行わせると、Fig.6(b)に示すようなデータに欠落のあるマスターカーブからもカーブフィットを行うことが可能となります。温度依存性が著しい粘弾性材料では、計測装置の温度制御が追いつかず、この種の不具合が発生しがちであるので、緩和スペクトルの平滑化の処理は非常に有効な対策です。

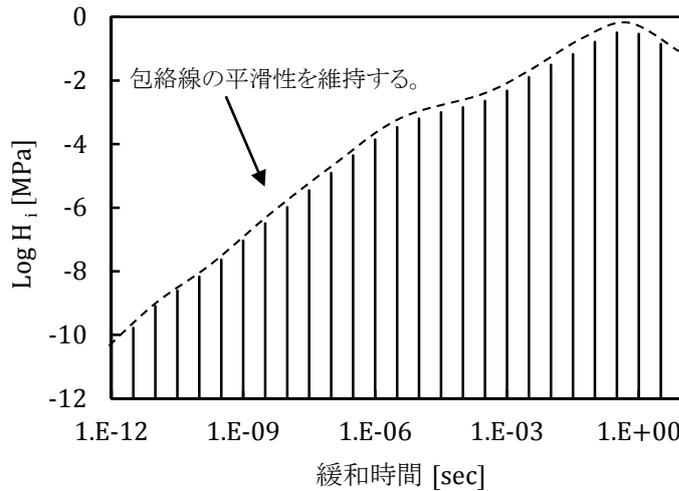
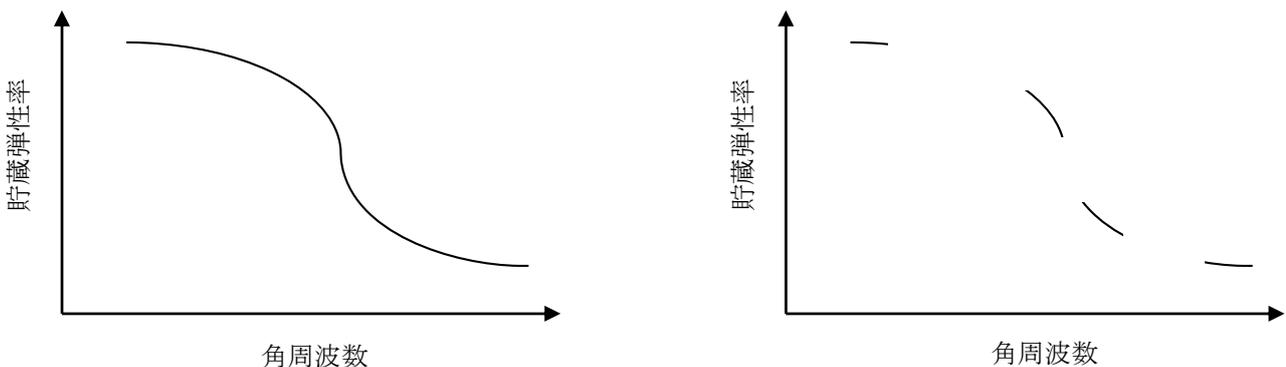


Fig.5 離散化された緩和スペクトルの例



(a) 連続した (良好な) 計算例

(b) データに欠落のある不連続な計算例

Fig.6 マスターカーブの計算例

【3】カーブフィットプログラムの開発

3.1 弊社での事例

弊社で開発した粘弾性カーブフィットプログラムを用いて、Fig.1 のマスターカーブから一般化マックスウェルモデルを同定します。本プログラムは、前節に示した制約条件を満たすように考慮されています。

プログラムの出力例を Fig.7 に示します。ユーザは指定された入力領域において「入力実験データ」、「ブルーニ級数の項数」、「ポアソン比」を入力し「Optimization」のボタンを押すだけで、自動的に近似計算を実行します。最適化の演算には準ニュートン法を用いています。準ニュートン法では、初期条件を最適値の近くに設定する必要がありますが、本プログラムでは、比較的収束しやすい初期条件を実験値から自動推定するようにしています。

いま、Fig.1 のエポキシ樹脂のマスターカーブは、角周波数で約 12 桁の範囲を有しているので、マックスウェルモデルの項数を 12 と設定します。なお先に示したように、全ての E_e , E_i , τ_i の正値は保証されたまま計算されます。同定された一般化マックスウェルモデルの係数は、自動的に Abaqus, Marc, LS-DYNA の入力ファイル形式によって出力されます。

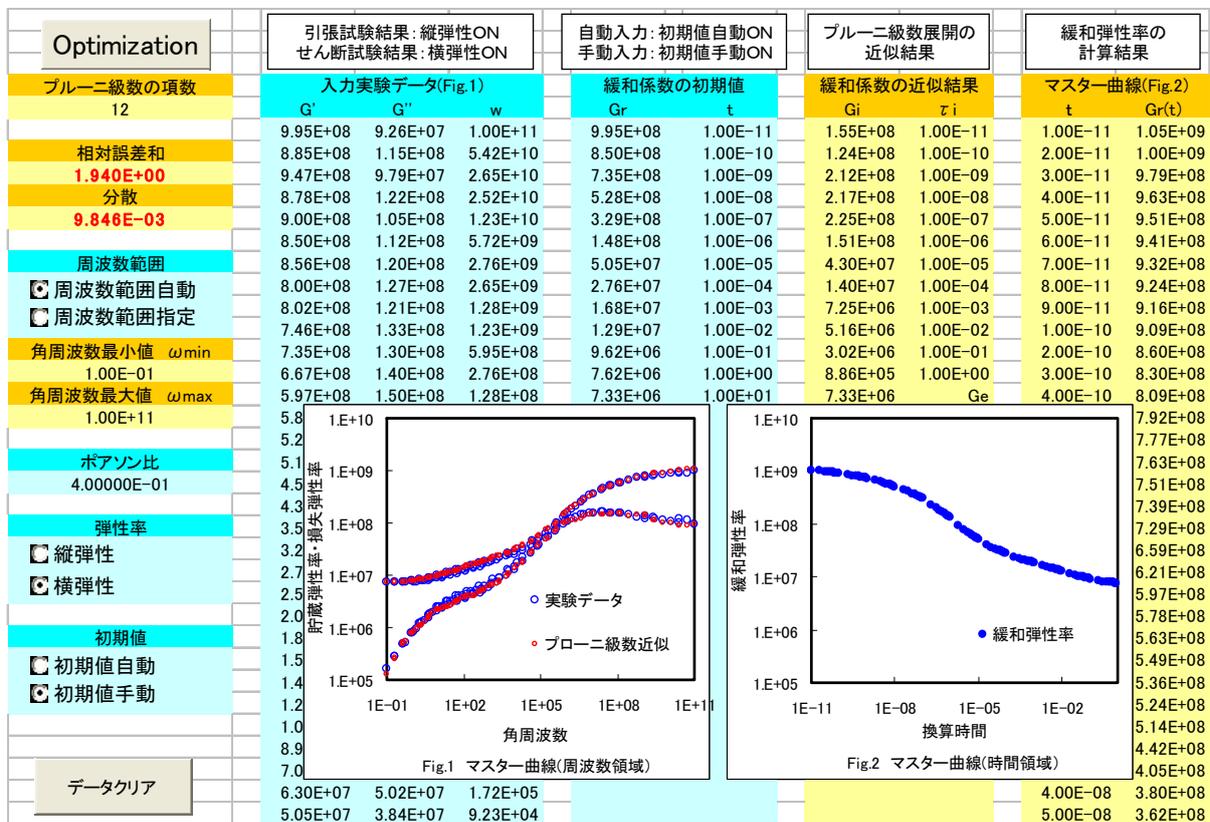


Fig.7 粘弾性カーブフィットプログラムを用いた一般化マックスウェルモデルの近似結果

3.2 周波数領域を限定したカーブフィット

ここまでは、一般化マックスウェルモデルの項数に制限が無い場合の例を示しました。しかし、LS-DYNA などの一部の汎用 FEM では、その項数が制限される場合があります。このような場合の計算例を以下①～③に示します。

① 限られた項数を用いて広い周波数領域全体を近似する場合 (失敗例 1)

解析例として、Fig.8 に示すような 12 桁の広がりを持つマスターカーブ全体を、5 項のマックスウェルモデルでカーブフィットした結果を示します。要素数が不十分なため、近似した結果が振動しているのが分かります。特に E'' の近似精度は悪く、この結果をそのまま利用することはできません。

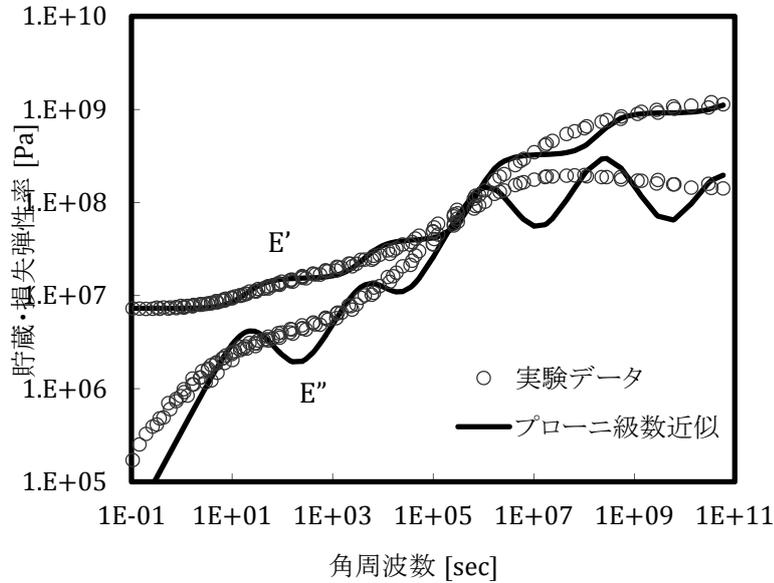


Fig.8 限られた項数を用いて広い周波数領域全体を近似する場合（失敗例 1）

② フルに近似した結果から特定の項数を取り出す（失敗例 2）

次にありがちな例として、十分な項数を持った一般化マックスウェルモデルの近似結果から、特定の項だけを取り出して利用することを考えます。Fig.9 に長時間側（図中左側）から5つのマックスウェルモデルのみを取り出して、他の材料物性の入力はそのままとして計算した結果を示します。E''は $0.1 \leq \omega \leq 1000$ rad/sec の範囲でよく一致していますが、E'は短時間側の高い値に引っぱられ一定値になってしまっています。このような場合は、着目する周波数範囲に見合うように(3)式の E_g を適切な値に変更しなければなりません。

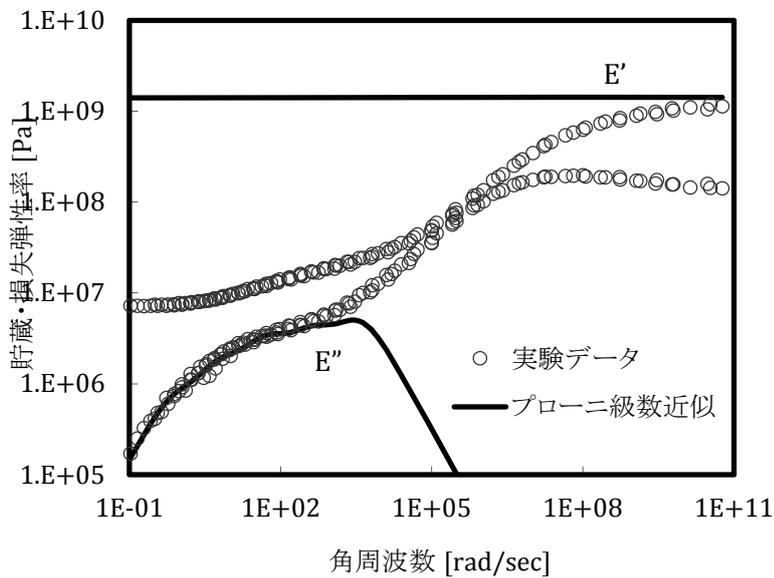


Fig.9 フルに近似した結果から特定の項数を取り出す場合（失敗例 2）

③ カーブフィットプログラムの利用

弊社が提供しているカーブフィットプログラムでは、以上のような問題を踏まえて、特定の周波数範囲に限った近似計算を自動で実行することができます。例えば $0.1 \leq \omega \leq 1000$ rad/secの範囲に注目してカーブフィットした例をFig.10 に示します。ユーザは 3.1 節に示した入力作業に付け加えて、Fig.10 に示すように対象とする角周波数の範囲を入力します。得られたマスター曲線を同じ図中に示しますが、指定した周波数範囲で良く実験値を再現していることがわかります。

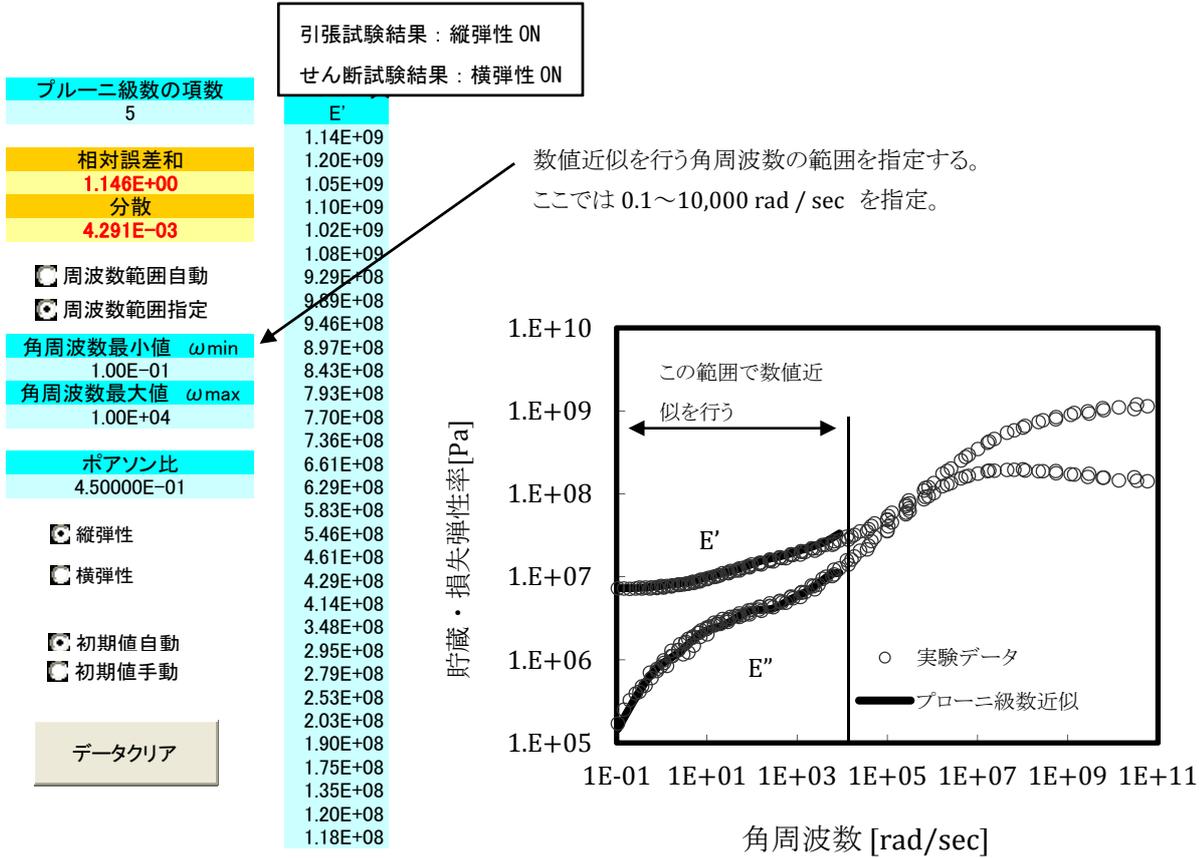


Fig.10 カーブフィットプログラムによる特定の周波数範囲での近似 (0.1 ≤ ω ≤ 1000 rad/sec)

【 4 】 まとめ

今回のニュースレターでは、動的粘弾性試験から得られたマスターカーブを数式近似する方法について紹介しました。また弊社で開発した粘弾性カーブフィットプログラムを用いて実際のエポキシ樹脂に適用した例を示しました。その他、欠損のある実験結果やマックスウェルモデルの項数の制限に対処する方法など、実際の解析の現場でありがちなトラブルとその対策について紹介しました。

参考文献

- (1) 粘弾性解析における諸問題 (その1 Maxwell モデルの基本的な性質), Mech D&A News, vol.2005-2, 株式会社メカニカルデザイン, 2005.
- (2) 粘弾性解析における諸問題 (その2 時間-温度換算則とマスターカーブ), Mech D&A News, vol.2005-3, 株式会社メカニカルデザイン, 2005.
- (3) 隆, 粘弾性挙動と特性係数, 材料システム, 6, 20-48, 1987.
- (4) I.Emri and N.W.Tschoegl, Rheol. Acta, 32, p.311, 1993.
- (5) 藤川ほか, 線形粘弾性特性係数関数の実用的近似法, 日本機械学会論文集(A編), 72-723, p.1703, 2006.
- (6) 藤川ほか, 緩和スペクトルの平滑性を考慮した貯蔵・損失モジュラスのプロニー級数近似法, 材料システム, 25, p.65, 2007.

表紙 : Pierre-Auguste Renoir, On the Terrace, 1881, Oil on canvas, The Art Institute of Chicago, Mr. and Mrs. Lewis Larned Coburn Memorial Collection.

株式会社 メカニカルデザイン
〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106
E-mail: comm@mech-da.co.jp http://www.mech-da.co.jp/