

vol. 2006-2

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

June 2006



平家納経・法華經從地涌出品第十五, 1164.

## 【特集】 粘弾性解析における諸問題

(その5 プリント基板の熱粘弾性反り)

*FEM Consulting Services for Engineering Practice  
Find Innovation in Tradition 2008-2019*

## 【1】基板の反りシミュレーションの課題

プリント基板の薄肉化が進み、リフロー時の反りが大きくなる傾向にある結果、高密度実装の阻害や接続信頼性の低下の問題が、以前にまして重要になってきている。このため、FEMによるシミュレーション技術が一般的になりつつあるが、計画段階でのタイムリーな評価の必要性から、より簡便な手法の開発が望まれている。一方、材料挙動の面からは、リフローの温度域内に材料のガラス転移点があると、粘弾性による緩和の効果を無視することができず、反り量の評価を不明瞭にする障壁になっている。

一般的に樹脂の粘弾性挙動は著しい温度依存性を示すため、その特性の把握が実験的にも難しく、さらにそれを数値モデル化するのにも困難を伴う。従来、本格的なFEMを用いた解析例<sup>(1)</sup>はあるが、日常の設計手法として用いるにはハードルが高いと言わざるをえない。一方、積層構造の熱変形を簡易に算出する方法として、これまで多層ばり理論<sup>(2)</sup>を用いたものがある。本手法はこれを積層板理論に拡張し<sup>(3)</sup>さらに粘弾性の効果を加味したものである。あわせて高精度の粘弾性計測に注目して開発してきた成果を踏まえて、今回の手法を検証した結果を報告する<sup>(7)</sup>。本手法は、板厚、材料定数を与えることによって瞬時に反り量と応力を求めることができるため、最適設計への適用など、今後広い範囲での拡張性が期待できる。

## 【2】粘弾性理論の平面応力場への適用と増分解法

積層板理論に粘弾性を組み込むために、一次元の線形粘弾性理論を平面応力場へ拡張し、それを増分的に扱う手法について述べる。一般に、線形粘弾性のモデル化は、一般化マクスウェルモデルを適用する。このモデルは、ばねとダッシュポットを直列に組み合わせたマクスウェルモデルを並列に配置したモデルであり、次式のように定義される。

$$E_r(t') = E_e + \sum_{n=1}^N E_n \exp(-t'/\tau_n) \quad \dots (1)$$

ここで、 $E_r(t')$ は緩和弾性率と呼ばれひずみを一定に保った応力緩和の条件下で定義される縦弾性率である。 $E_n$ 、 $\tau_n$ 及び $N$ は材料定数であり、それぞれProny級数の係数、緩和時間及びマクスウェルモデルの項数である。また、 $t'$ は換算時間であり、時間-温度換算則が成立する場合において、時間-温度換算因子 $a(T)$ は、実時間及び温度をそれぞれ、 $t$ 及び $T$ とすれば次式から求められる。

$$t' = \int_0^t \frac{1}{a(T)} d\eta \quad \dots (2)$$

(1)式と(2)式によって、温度依存性を有する粘弾性体の一次元的な挙動を表現することができる。次に平面応力状態を考え、面内方向に一様な変形が生じると仮定すると応力 $\sigma$ とひずみ $\varepsilon$ の関係は次のような緩和形式で表現することができる<sup>(5)</sup>。 $\nu$ はポアソン比である。

$$\sigma(t) = \frac{1}{1-\nu} \int_0^t E_r(t'-\tau') \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \dots (3)$$

(3)式を数値的に取り扱うために増分形式に改める。いま任意の時間を $t_m$ とし、時間増分 $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$ 間でひずみが一定の勾配 $\Delta \varepsilon(t_m) / \Delta t_m$ で変化すると仮定すると、 $\Delta t_m$ における応力増分 $\Delta \sigma(t_m)$ とひずみ増分 $\Delta \varepsilon(t_m)$ の関係は(1)式及び(3)式から次式で表すことができる<sup>(4)(5)</sup>。ここで $\sigma_n$ は、 $n$ 項のマクスウェルモデルの応力である。

$$\Delta \varepsilon(t_m) = \frac{1}{A} \left\{ \Delta \sigma(t_m) + \sum_{n=1}^N a_n(\Delta t'_m) \sigma_n(t_m - \Delta t_m) \right\} \quad \dots (4)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Delta t'_m &= t'_m - t'_{m-1} \\ a_n(\Delta t'_m) &= 1 - \exp(-\Delta t'_m/\tau_n) \\ b_n(\Delta t'_m) &= a_n(\Delta t'_m) \cdot \tau_n/\Delta t'_m \\ A &= \frac{1}{1-\nu} \left\{ E_e + \sum_{n=1}^N b_n(\Delta t'_m) \cdot E_n \right\} \quad \dots (5) \\ \sigma_n(t_m - \Delta t_m) &= \frac{1}{1-\nu} \int_0^{t_m - \Delta t_m} E_n \exp\left\{ \frac{-t'_m + \Delta t'_m + \tau'}{\tau_n} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

なお、以下に示す積層板理論のなかでは、各層のひずみの連続性に注目して、式を導くので(4)式はひずみ増分に注目した形式となっている。

### 【3】 積層板理論の粘弾性形式への拡張

#### 3.1. 積層板理論によるモデル化

プリント基板を Fig.1 に示すような積層板によってモデル化するために以下のような仮定を設ける。まず、板は、面内方向において等方性かつ均一である。その板厚は十分に薄く、面に垂直な方向の応力は生じないものとする。板は拘束を受けていないものとし、一様な温度分布が与えられてそりを生ずるものとする。ここで、板を上凸型に変形させる曲げモーメントを正とし、この方向のたわみを正とする。なお、 $\alpha_i$ 、 $\nu_i$ 、 $H_i$  は  $i$  層の線膨張係数、ポアソン比、板厚である。このモデルに温度変化を与えたときに生ずる曲率は、等方性の仮定および無拘束の条件から、 $xy$  平面内の全ての方向について等しくなる。従ってここでは Fig.2 に示すように  $xz$  平面内での変形について考えることで、積層板のそりを計算することができる。

#### 3.2. 層内における応力ひずみ式

積層板の理論では、各層のひずみを独立として考えそれぞれの界面が連続であるとして、全体のそりを求める。いま、各層において発生するひずみは、次の3種類によって構成されている。

- a. 熱ひずみ
- b. 板の面内方向力によるひずみ
- c. 板のモーメントによるひずみ

以下に、それぞれのひずみの内訳を示す。

##### a. 熱ひずみ

ある時間  $t_m$  において、 $i$  層目の板が  $\Delta T(t_m)$  の温度変化を受けると、以下の熱ひずみ  $\Delta \varepsilon'_i(t_m)$  を生ずる。

$$\Delta \varepsilon'_i(t_m) = \alpha_i \cdot \Delta T(t_m) \quad \dots (6)$$

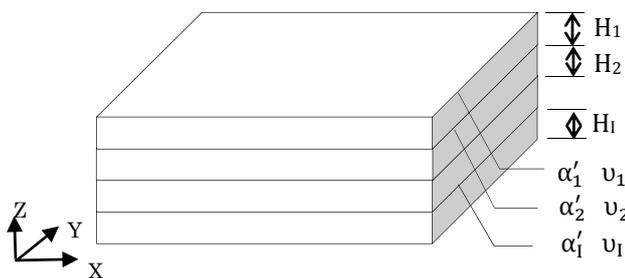


Fig.1 積層板によるモデリング

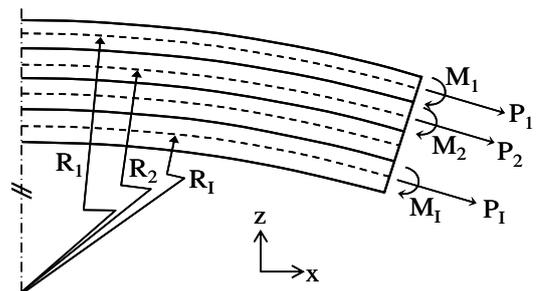


Fig.2 ZX 平面内における変形

## b. 板の面内方向力によるひずみ

Fig.2 に示す積層構造の各層において面内力  $P$  とモーメント  $M$  が発生していると考える.  $i$  層に生じる面内方向力を  $P_i(t_m)$  とするとその増分は(7)式のようになる.  $H_i, B$  はそれぞれ各層の板厚と幅である. また,  $\sigma''_i(t_m)$  は面内方向力による応力である.

$$\Delta P_i(t_m) = H_i \cdot B \cdot \Delta \sigma''_i(t_m) \quad \dots (7)$$

先に導いた(4)式を用いて, 粘弾性の効果を導入すると(7)式は, ひずみ増分の形式で, 以下のように書ける.

$$\Delta \varepsilon''_i(t_m) = \frac{1}{H_i \cdot B \cdot A_i} \left\{ \Delta P_i(t_m) + \sum_{n=1}^N a(\Delta t'_m) \cdot P_{i,n}(t_m - \Delta t_m) \right\} \quad \dots (8)$$

ここで,  $P_{i,n}(t_m - \Delta t_m) = H_i \cdot B \cdot \sigma''_{i,n}(t_m - \Delta t_m)$

## c. 板のモーメントによるひずみ

次に, 各層に働くモーメントによる粘弾性を考慮したひずみ増分も同様に, (10)式のように求められる. なお,  $z$  は  $i$  層の中立面からの距離である.

$$\Delta M_i(t_m) = \frac{H_i^3 \cdot B}{12 \bar{z}_i} \cdot \Delta \sigma_i'''(t_m) \quad \dots (9)$$

$$\Delta \varepsilon_i'''(t_m) = \frac{12 \bar{z}_i}{H_i^3 \cdot B \cdot A_i} \left\{ \Delta M_i(t_m) + \sum_{n=1}^N a(\Delta t'_m) \cdot M_{i,n}(t_m - \Delta t_m) \right\} \quad \dots (10)$$

ここで,  $M_{i,n}(t_m - \Delta t_m) = \frac{H_i^3 \cdot B}{12 \bar{z}_i} \cdot \sigma_{i,n}'''(t_m - \Delta t_m)$

また, モーメントによって発生する曲率  $C_i(t_m)$  ( $=1/\text{曲率半径 } R_i(t_m)$ ) の時間増分  $\Delta C_i(t_m)$  と  $\Delta \varepsilon_i'''(t_m)$  は次式で表せる.

$$\Delta \varepsilon_i'''(t_m) = \bar{z}_i \cdot \Delta C_i(t_m) \quad \dots (11)$$

## 3.3. ひずみの連続性と荷重の釣り合い式

各層に発生する面内方向のひずみは上記の a~c の和となるが, これは各層の界面において連続とならなければならないので次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \alpha_i \Delta T(t_m) + \frac{1}{H_i \cdot B \cdot A_i} \left\{ \Delta P_i(t_m) + \sum_{n=1}^N a(\Delta t'_m) \cdot P_{i,n}(t_m - \Delta t_m) \right\} - \frac{H_i}{2} \cdot \Delta C_i(t_m) \\ & = \alpha_{i+1} \Delta T(t_m) + \frac{1}{H_{i+1} \cdot B \cdot A_{i+1}} \left\{ \Delta P_{i+1}(t_m) + \sum_{n=1}^N a(\Delta t'_m) \cdot P_{i+1,n}(t_m - \Delta t_m) \right\} \\ & + \frac{H_{i+1}}{2} \cdot \Delta C_{i+1}(t_m) \quad i = 1 \sim I - 1 \end{aligned} \quad \dots (12)$$

また, 荷重についても以下の釣り合いを満足しなければならない.

$$\sum_{i=1}^I \Delta P_i(t_m) = 0 \quad \dots (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \Delta M_i(t_m) + \Delta P_1(t_m) \cdot \left(\bar{z}' - \frac{H_1}{2}\right) + \Delta P_2(t_m) \cdot \left(\bar{z}' - H_1 - \frac{H_2}{2}\right) \\ & + \dots + \Delta P_I(t_m) \cdot \left(\bar{z}' - H_1 - H_2 - \dots - \frac{H_I}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad \dots (14)$$

いま、板厚が曲率半径に対して微小であるとする、各層の曲率は、等しく  $\Delta C_1 \cong \Delta C_2 \cong \dots \cong \Delta C_I = \Delta C$  であるので、(12)、(13)、(14)式を連立させて  $\Delta P_i(t_m)$ 、 $\Delta M_i(t_m)$  および曲率  $\Delta C(t_m)$  を求めることができる。

### 3.4. 応力とたわみの算出

以上の手順により面内力と曲率を導くことができた。これらの結果を用いて、応力とたわみを求める。まず、各層に生ずる応力は面内方向力とモーメントによる応力の和として、次のように求まる。

$$\sigma_i(t_m) = \frac{P_i(t_m)}{H_i B} + \frac{12z}{H_i^3 B} M_i(t_m) \quad \dots (15)$$

次に、たわみについて考える。本モデルでは、等方性および無拘束の条件であるので曲率は、 $xy$  平面内の全ての方向について等しくなる。したがって Fig.3 のように板の中心からコーナーまでの距離を  $L$  とし、このライン上の断面を Fig.4 のように考え、板の先端の傾きを  $\theta$  とすると最大たわみ  $\delta(t_m)$  は次式となる。

$$\delta(t_m) = (1 - \cos \theta) / C(t_m) \quad \dots (16)$$

ここで、 $\theta$  が微小であるとし、かつ板の面内の伸びが微小であり  $L=L'$  が成り立つとすると次式が得られる。

$$\delta(t_m) = \frac{L^2 \cdot C(t_m)}{2} \quad \dots (17)$$

以上により板の応力とたわみを導くことができた。

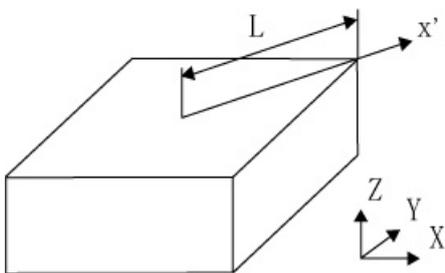


Fig.3 長さ L の定義

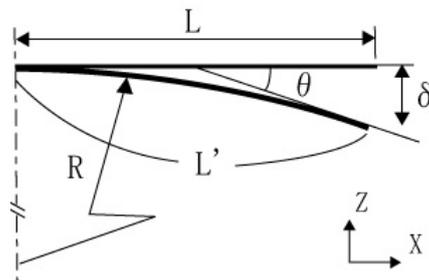


Fig.4 長さ L の断面におけるたわみ

## 【4】粘弾性材料の計測と同定

今日まで粘弾性を考慮した熱応力解析が十分に行われなかった背景には精度の高い実験計測が難しくまた、得られた計測結果から粘弾性モデルに同定することが困難であった事情がある。粘弾性体は、特にガラス転移点近傍において著しい温度依存性を有するため、実験中の温度管理が難しく、また、得られた時間定数が 20 桁程度の極めて広い領域にわたるため最新の最適手法などを用いないと係数決定が困難であるといった課題があった。ここでは、エポキシ樹脂を例にとり検討した結果を示す。

計測には、ティー・エイ・インスツルメンツ社の動的粘弾性計測装置 RSAIIIを使用し、 $-40\sim 60^{\circ}\text{C}$ までの温度範囲で昇温速度  $2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ , 3.16, 10, 31.6, 100rad/sec の4種類の角速度で動的粘弾性計測を行い、Fig.5及びFig.6に示すように、貯蔵弾性率  $E'$ 、損失弾性率  $E''$ を計測した。この機器は堅牢かつ大流量の恒温槽を有し温度特性に優れる。Fig.7は、横軸に換算角速度をとり、基準温度  $T_R$ に対して計測結果をマスターカーブに引き直した結果を示す。マスターカーブを作成するにあたって、時間-温度換算因子としては、以下のW.L.F式を適用した。

$$\log(a(T)) = -\frac{C_1(T - T_R)}{C_2(T - T_R)} \quad \dots (18)$$

今回の例では、 $C_1$ ,  $C_2$ には一般的な推奨値を使用し、準ニュートン法を用いて  $T_g$ を推定することによって、マスターカーブの近似精度を上げる手法を採用した<sup>(1)(2)</sup>。その結果、幅広い角速度領域で1本の滑らかなマスターカーブが得られた。更に、マスターカーブから一般化マクスウェルの係数をやはり最適化計算によって求め、(1)式の緩和曲線が数値的に計算できるようにした。結果をFig.8に示す。粘弾性体の時間挙動と周波数に対する挙動は、次式で関係付けられており、これを用いるとFig.8に示すように、実測値を良好に近似する数値モデルを得ることができる。

$$E' = E_e + \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^2 \omega'^2}{1 + \tau_n^2 \omega'^2} E_n \quad E'' = E_e + \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n \omega'}{1 + \tau_n^2 \omega'^2} E_n \quad \dots (19)$$

これら一連の同定手順はExcelを用いてプログラミングしており、詳細は参考文献を参照されたい<sup>(6)</sup>。

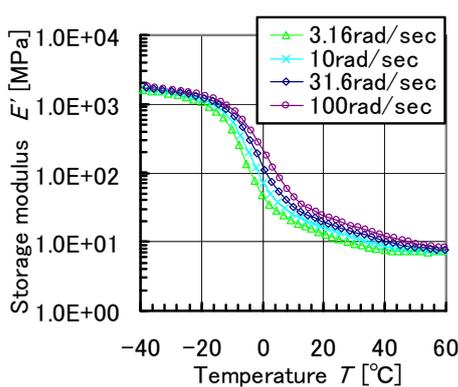


Fig.5 エポキシ樹脂の貯蔵弾性率（実測値）

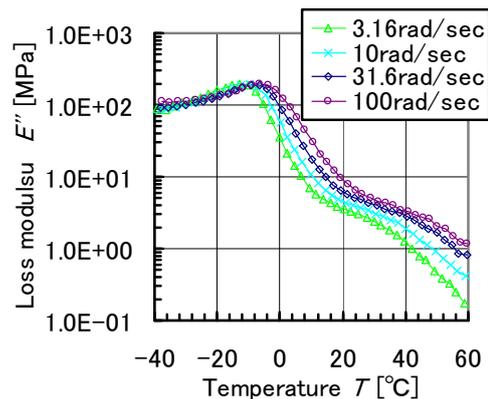


Fig.6 エポキシ樹脂緩和弾性率（実測値）

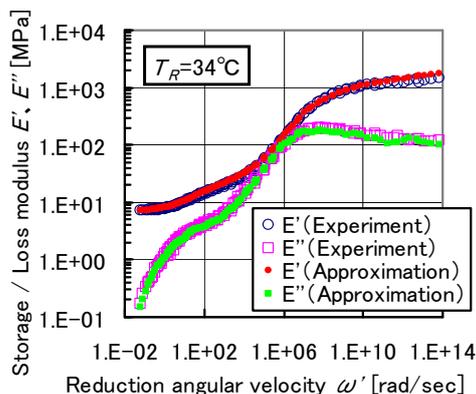


Fig.7 マスターカーブの作成結果

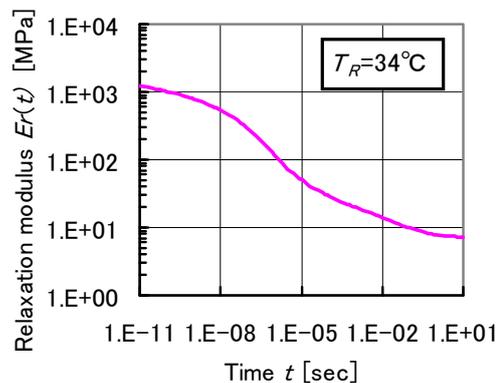


Fig.8 緩和弾性率の同定結果

## 【5】 粘弾性積層板の計算例と検証

3節までに示した計算手法を検証するため Fig.9 のような長さ 40mm×幅 20mm のアルミニウム(弾性体, 板厚 0.1mm) とエポキシ樹脂(粘弾性体, 板厚 1.0mm) の 2 層の積層板を考える. この 2 層の積層板に, Fig.10 に示すようなステップ状に 10°C の温度上昇を与え, 10sec まで温度を保持する計算を行った. 温度変化としては任意のものを与えることができるが, 今回は検証のために簡易な入力としている. エポキシ樹脂及びアルミニウムの材料物性は, 4 節で同定した値, 及び Fig.9 の値を用いた. アルミニウムのヤング率は, 70,000MPa とした.

また, 検証のため同一のモデルの FEM 解析を行った. FEM プログラムは, Abaqus ver6.7 を使い, 要素は積層シェルによりモデル化した. Fig.11 に FEM により算出した多層板の変形図を示す. Fig.12 にたわみの履歴, Fig.13 に 2 層目上面における面内方向応力の履歴, Fig.14 に 1, 2 層の 0.01sec と 10sec におけるそれぞれ面内方向応力の板厚方向分布を示す. 粘弾性の緩和挙動により応力, たわみの減少がみられる. 本手法による計算結果は, 応力, たわみ共に FEM 解と一致することが確認できた.

## 【6】 まとめ

粘弾性の効果を加味した積層板理論によるプリント基板の反り変形の簡易計算手法を確立した. また, FEM 解と比較し, 一致することを確認した.

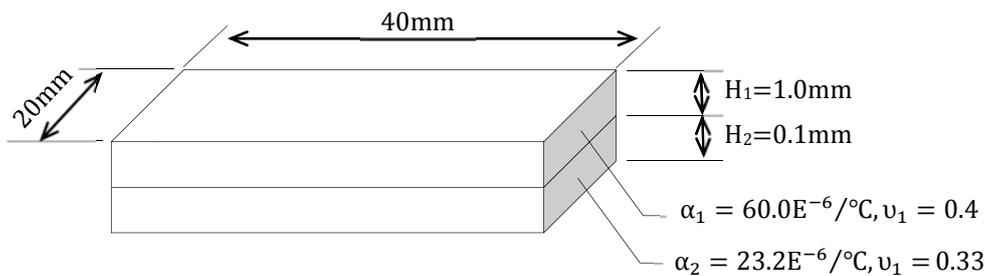


Fig.9 FEM による検証モデル

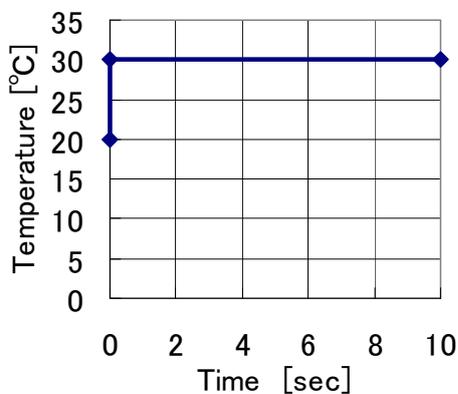


Fig.10 温度履歴の入力

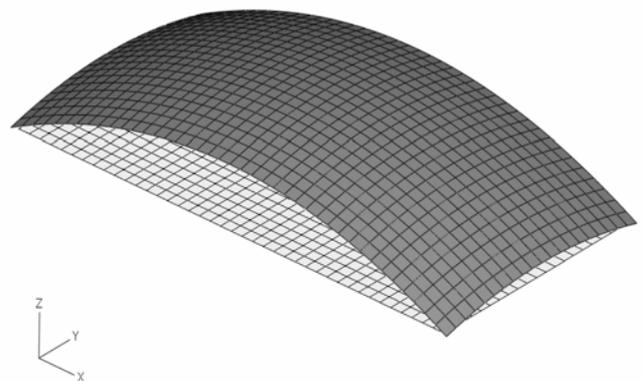


Fig.11 変形図(FEM)

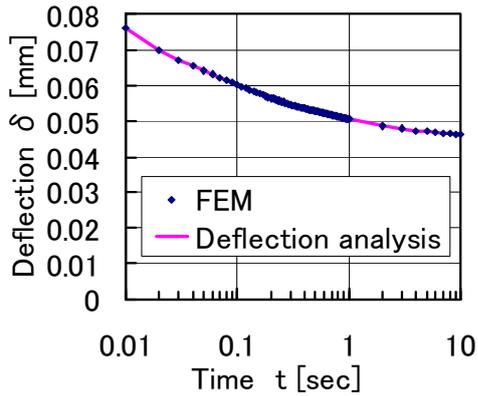


Fig.12 たわみの履歴

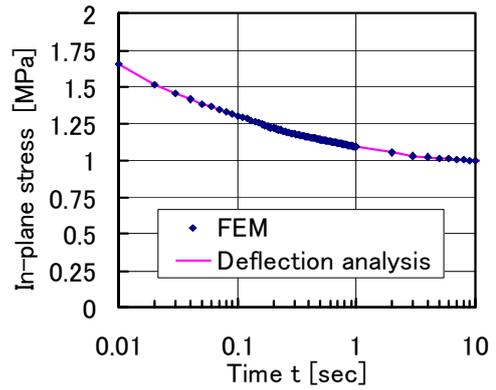
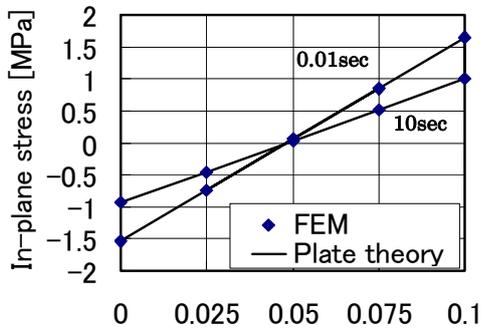
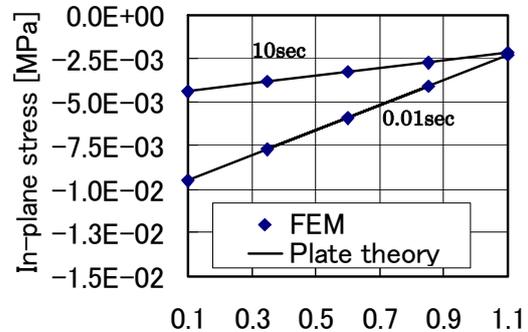


Fig.13 第2層上面の面内応力の履歴



(a) 第2層



(b) 第1層

Fig.14 面内応力の分布

参考文献

- (1) 平田ほか, FEM粘弾性解析によるLSIパッケージの反り変形の研究, Mate2005, pp.329-332, 2005.
- (2) 尾田ほか, 多層ばり理論によるプリント基板の応力・変形の評価, 日本機械学会論文集, A, 59-563, pp.203-208, 1993.
- (3) 永田ほか, 板理論を用いたプリント基板の反り計算手法の確立, エレクトロニクスシンポジウム論文集, vol.17, pp.219-222, 2007.
- (4) 三上ほか, 応力緩和試験による線形粘弾性特性係数関数決定法, 日本実験力学学会公演論文集, No.6, pp.347-351, 2006.
- (5) 三澤, 線形粘弾性固体の力学, 材料システム第6巻, pp49-79, 1987.
- (6) 藤川ほか, 動的粘弾性試験におけるマスター曲線自動作成法, 実験力学, vol.7, No.4, pp387-392, 2007.
- (7) 三上ほか, プリント基板の熱粘弾性反りシミュレーション技術の確立, Mate2009, pp.115-118, 2009.

表紙：平家納経・法華経従地涌出品第十五, 1164.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail:comm@mech-da.co.jp http://www.mech-da.co.jp/