



## 平等強さのはり

Cantilever Beam with a uniform distributed load

R01\_YT/2014/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

例えば先端に集中荷重を受ける片持ちはり考えたとき、はりに作用する曲げモーメントは、先端からの距離に比例して大きくなる。したがって、断面が一様であれば、曲げ応力の大きさも先端からの距離に比例し、固定端で最大となる。

もし、断面係数が先端からの距離に比例して大きくなるような（先細の）はりを設計できれば、曲げ応力は位置によらず一定となり、経済的なはりが得られる。このような曲げ応力がはりの長手方向に一定なはりを、平等強さのはりと称する。

ここでは、集中荷重を受ける片持ちの条件下で、平等強さのはりに関する理論解と FEM 解析の結果を比較検証する。

### 平等強さのはり（集中荷重を受ける片持ちはり）・理論解 中原, 実践材料力学, p.77 例題 12 参照<sup>(1)</sup>

Fig.1 に示すような片端を固定されたはりの先端に集中荷重を加える。はりの幅を一定にしたとき、その厚さを変化させて、はりの断面係数を長手方向に比例的に変化させる。この条件を求めるとともに、①たわみ、②たわみ角を求める。諸元は以下の通りである。

はりの長さ  $l=1000$  [mm] ヤング率  $E=200$  [GPa] 荷重  $P=10$  [N]

なお、固定端における断面積は  $A=100$  [mm<sup>2</sup>]、断面二次モーメントは  $I_0=833.3$  [mm<sup>4</sup>]として、平等強さのはりを実現する。

平等強さのはりの考え方は以下の通りである。

1. 固定端と任意断面で生ずる最大引張り応力  $\sigma_0$  ,  $\sigma_1$  を求める。

$$\sigma_0 = \frac{6pl}{bh_0^2} \quad , \quad \sigma_1 = \frac{6Px}{bh^2} \quad \dots (1)$$

2.  $\sigma_0 = \sigma_1$  を満たすはりの高さを次式で表すと

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \dots (2)$$

3. 固定端の  $I_0$  より、任意断面の断面二次モーメント  $I$  を求める。

$$I = \frac{bh^3}{12} = I_0 \left( \frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots (3)$$

4. ①たわみを求める。

たわみ曲線の微分方程式を用い境界条件によってたわみが求まる。

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = Px \quad \Longrightarrow \quad \frac{EI_0}{Pl^{3/2}} \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = x^{\frac{1}{2}} \quad \dots (4)$$

5. 固定端において、たわみおよびたわみ角が 零 であるので、

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=l} = 0 \quad , \quad w_{x=l} = 0 \quad \dots (5)$$

6. したがって、たわみは次式となる。

$$w_{x=0} = w_{\max} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI_0} = \frac{2}{3} \times \frac{10 \times 1000^3}{2 \times 10^5 \times 833.3} = 40.0 \text{ [mm]} \quad \dots (6)$$

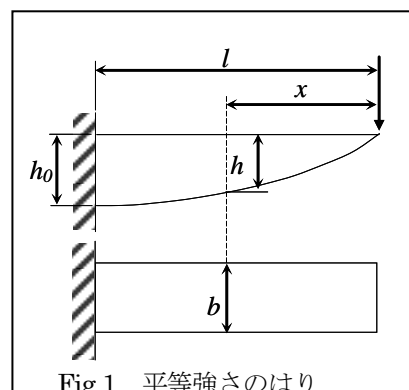


Fig.1 平等強さのはり

7. たわみ角を求める.

$$\theta = \frac{2Pl^{3/2}}{EI_0}(\sqrt{x} - \sqrt{l})$$

$$\theta_{x=0} = \frac{2Pl}{EI_0} = \frac{2 \times 10 \times 1000^2}{2 \times 10^5 \times 833.3} = 0.12 \text{ [rad]} \quad \dots (7)$$

### 解析条件

Fig.2 に解析モデルを示す.

- 要素：三次元シェル要素 S4  
(ここでははりの厚さを調整するため、シェル要素を適用した.)

- 材料定数：ヤング率 E = 200 [GPa]  
ポアソン比 ν = 0

- 荷重：集中荷重 P = 10 [N]

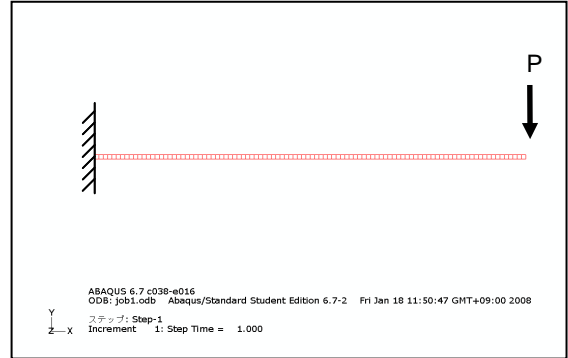


Fig.2 解析モデル

### 解析結果

Fig.3~Fig.5 に Abaqus による解析結果を示す. また得られた結果をまとめて Table.1 に示す. 理論解に一致する解析結果が得られた.

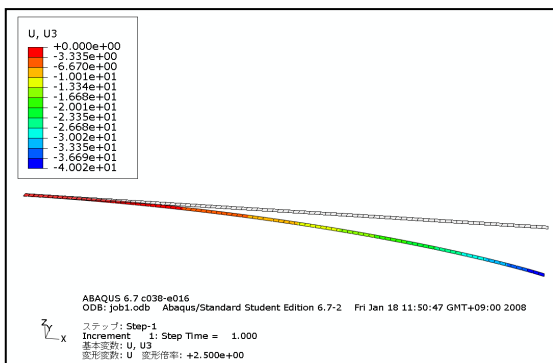


Fig.3 変形図 (たわみ w)

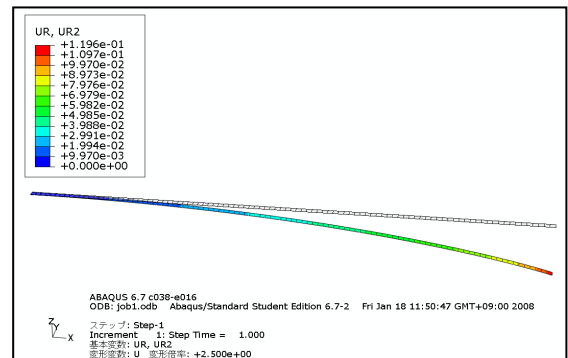


Fig.4 変形図 (たわみ角 θ)

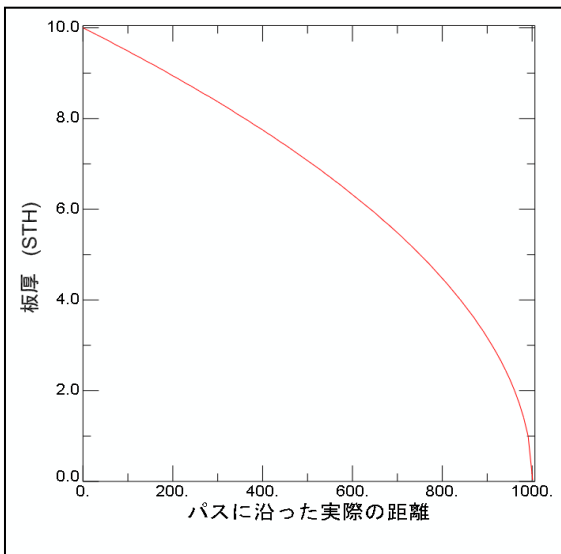


Fig.5 はりの厚さ分布

Table.1 理論解と解析結果の比較

		理論解	FEM 解
最大たわみ	[mm]	40.0	40.0
最大たわみ角	[rad]	0.12	0.12

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail: comm@mech-da.co.jp <http://www.mech-da.co.jp>

*Mechanical Design & Analysis Corporation*