非線形振子の固有振動解析

The natural frequency of the non-linear pendulum

R01_YT/2014/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★
提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

幾何学的非線形性として分類される大変形問題の特徴は，回転変位が大きくなることによって，角度に関する１次近似（sinφ＝φ）が成り立たなくなる点にある．ここでは、その最も代表的な例として、大振幅の振子を取り上げて検討する．

理論解

Fig.1 に示すように振子の腕の先端に質量を与えた時の固有周期を求め，理論解と比較する．諸元は以下の通りである．

単振子の腕の長さ L= 100 [mm]　　先端の重量 W = mg = 1 [kg]

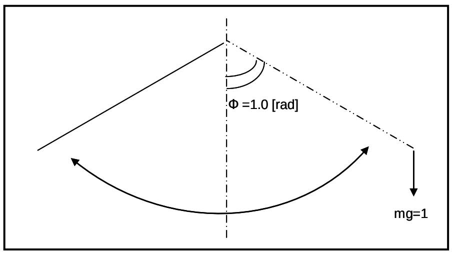


Fig.1　単振子

1. 一般に Fig.1 のような単振子の運動方程式は(1)式で表せる．

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\phi \qquad \cdot\cdot\cdot(1)$$

2. 振子の振動が小さい時には，sin φ ≒ φ の近似が成立するので(1)式は(2)式のように表せる．

$$\frac{d\phi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\phi \qquad \cdot\cdot\cdot(2)$$

3. (2)式は通常の単振動と同じ形の運動方程式となり，その周期 T は(3)式で求められる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdot\cdot\cdot(3)$$

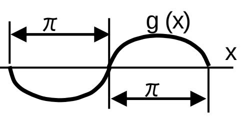
4. 一方，sin φ を展開すると(4)式の様になる．

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5\cdots\cdots = \phi(1-\frac{1}{3!}\phi^2+\frac{1}{5!}\phi^4\cdots\cdots) \qquad \cdot\cdot\cdot(4)$$

5. 角度が大きくなると，(4)式の第２項以下の影響が大きくなり，復元力が変位に比例しない非線形系の振動となる．このような非線形系の単振子の周期 T は Table.1 に示すように(5)式で求められる．

$$T = 4K(k)\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdot\cdot\cdot(5)$$

Table.1　非線形振動系の固有応答(1)

復元力特性　g(x)	固有周期　T	備考
$\frac{mg}{l}\sin x$ 	$4K(k)\sqrt{\frac{l}{g}}$, $k^2 = \sin^2\frac{A}{2}$, $\lvert A\rvert < \pi$	x は長さ l の単振子の傾斜角

6. このモデルにおいて，線形振動として導かれた(3)式により周期Tを求めると，角振幅 ϕ の値によらず、以下の値となる.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.635 \ [\mathrm{sec}] \quad \cdot\cdot\cdot (6)$$

7. 次に ϕ が十分小さい場合として， $\phi=0.1(\phi^2 = 0.01<<1)$，大きな場合として $\phi=1$ とし，非線形振動として導かれた(5)式により周期Tを求めると，以下の値となる．$\phi=$ 0.1 の場合は(6)式の線形解にほぼ一致し，また $\phi=1$ の場合は周期が長くなることがわかる.

$\boxed{\phi=0.1 \text{ の場合}}$

$$k^2 = \sin^2\phi = 2.5\times10^{-3}$$

$$K(k) = 1.57178$$

$$T = 4\times1.57178\times\sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.635 \ [\mathrm{sec}]$$

$\boxed{\phi=1 \text{ の場合}}$

$$k^2 = \sin^2\phi = 0.2299$$

$$K(k) = 1.67502$$

$$T = 4\times1.67502\times\sqrt{\frac{100}{9800}} = 0.677 \ [\mathrm{sec}] \quad \cdot\cdot\cdot (7)$$

解析条件

■要　　素　：　平面はり要素　B31

■材料定数　：　ヤング率　　E=20,000 [kg/mm]
　　　　　　　　ポアソン比　ν=0.3
　　　　　　　　質量密度　　$\rho=1.0\times10^{10}[\mathrm{sec}^2/\mathrm{mm}^4]$

解析結果

Fig.2 に Abaqus による解析結果を示す．振幅によらず常に鉛直下方向に重力が加わるような条件下で解析を進めると，このような応答が得られる.

この図は質点の水平方向の変位を示しており，固有周期として 0.673 [sec] が得られる．また，結果をまとめて Table.2 に示す．良好な結果が得られた.

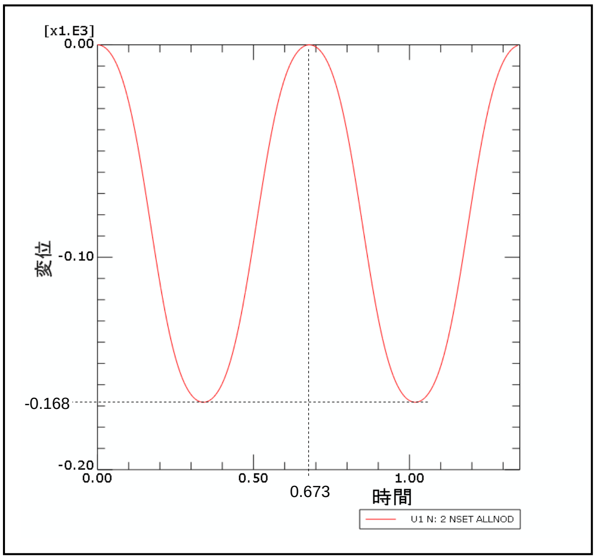


Fig.2 質点の水平方向の変位

Table.2 固有周期の解析結果

		理論解	FEM 解
微小振幅（線形）		0.635	―
有限振幅（非線形）	ϕ=0.1	0.635	0.629
	ϕ=1.0	0.677	0.673

参考文献
(1)　日本機械学会，機械工学便覧，A3-80，1992.

※　Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン
〒182-0024　東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
TEL 042-482-1539　FAX 042-482-5106
E-mail:comm@mech-da.co.jp　http://www.mech-da.co.jp
Mechanical Design & Analysis Corporation