



コイルばねの解析

Coiled spring Problem

R01\_YT/2014/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

ねじり応力の応用的な例題として、コイルばねの圧縮の問題を解析する。コイルばねの端部に圧縮が加わるとき、素線に発生する応力は素線を引き伸ばした状態に単純なねじり荷重を加えた問題とほぼ等しいことが知られている。ここでは、その理論を示して FEM 解析の結果と比較するとともに、在来の実用式との比較を行う。また、要素タイプとして はり要素およびソリッド要素を用いた解析を行う。

**理論解** 中原, 実践材料力学, p.135 演習問題 8.2 参照<sup>(1)</sup>.

Fig.1 に示すような円筒形コイルばねに たわみを与えるとき、ばねに生ずる 最大せん断応力を求める。諸元は以下の通りである。

- 素線の直径  $d = 8[\text{mm}]$                       コイルの平均直径  $D = 40[\text{mm}]$
- 効巻き数  $n = 6$                                       横弾性係数  $G = 8.2 \times 10^4 [\text{MPa}]$
- たわみ  $\delta = 36[\text{mm}]$

材料力学による解は以下の通りである。

1. 荷重はコイルばねの中心軸に沿って作用する理想的な状態と考えるとき、素線に作用する ねじりモーメント  $T$  と せん断力  $Q$  の関係は

$$T = PR, \quad Q = P \quad \dots (1)$$

2. ねじりモーメントによって素線表面に生ずる せん断応力  $\tau_0$  は、素線が円形断面ならば、

$$\tau_0 = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad \dots (2) \quad \text{【理論解①】}$$

3. せん断力によって生ずる せん断応力  $\tau'$  を求めると

$$\tau'_{mean} = \frac{4P}{\pi d^2} \quad \dots (3)$$

4. Fig.2 に示すように、 $\tau_0$  と  $\tau'$  の向きは外側では反対になり、内側では一致するので中心軸に最も近い内側  $m$  点に最大せん断応力  $\tau_{max}$  を生じる。

$$\tau_{max} = \tau_0 + \tau'_{mean} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right) \quad \dots (4) \quad \text{【理論解②】}$$

5. (2), (4)式では せん断応力は素線を真直ぐな棒とみなしたが、本来 半径  $R$  の円弧に曲がっていることから、厳密な計算を行おうとすると次式のようなになる

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( \frac{4-k}{4-4k} + 0.615k \right), \quad k = \frac{d}{2R} = \frac{8}{2 \times 20} = 0.2 \quad \dots (5) \quad \text{【理論解③】}$$

6. コイル半径  $R$  に比べて素線の直径  $d$  の値が十分に小さいときには (2)式を用いても十分な精度で応力が求められるが、 $d/R$  が あまり小さくない場合には(4), (5)式を用いた方がよい。

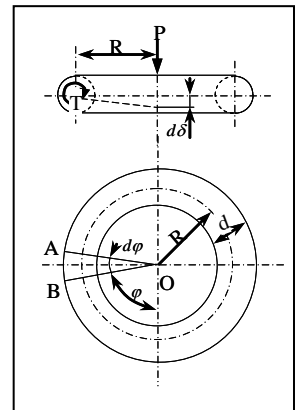


Fig.1 コイルばね

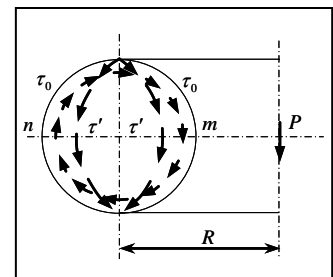


Fig.2 コイルばねのせん断応力

7. 次に、軸荷重  $P$  を求める。

Fig.1 に示す素線に沿って長さ  $R \cdot d\varphi$  の要素 AB を考えると、その両端にはねじりモーメントが作用し、この要素を真直ぐな棒と考えれば ねじりモーメントによって両端は  $\omega R \cdot d\varphi$  だけ相対的に回転する。

Fig.3 において、コイルばねの端面の中心を  $O$  とし、 $O$  点は  $\overline{BO}$  に直角に  $\overline{BO} \cdot \omega R \cdot d\varphi$  だけ移動し、これの軸方向成分は

$$d\delta = \overline{BO} \cdot \omega R \cdot d\varphi \cdot \sin \alpha = \omega R^2 \cdot d\varphi$$

$$\delta = \omega R^2 \int_0^{2\pi n} d\varphi = 2\pi n \cdot \omega \cdot R^2 = 2\pi n \cdot \frac{32PR}{\pi d^4 G} \cdot R^2$$

$$\therefore P = \frac{\delta G d^4}{64 n R^3} = \frac{36 \times 8.2 \times 10^4 \times 8^4}{64 \times 6 \times 20^3} = 3,936 \text{ [N]} \quad \dots (6)$$

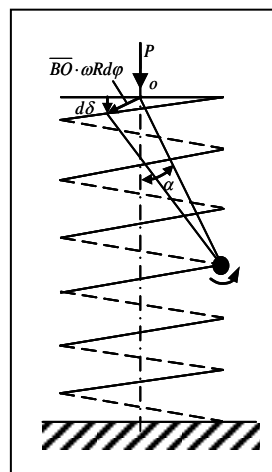


Fig.3 コイルばねのたわみ

8. これらの式を用いて、ばねに生ずる 最大せん断応力を求める。

【理論解①】 式を用いると  $\tau_0 = \frac{16 \times 3,936 \times 20}{\pi \times 8^3} = 783 \text{ [N/mm]} \quad \dots (7)$

【理論解②】 式を用いると  $\tau_{\max} = \frac{16 \times 3,936 \times 20}{\pi \times 8^3} \left( 1 + \frac{8}{4 \times 20} \right) = 861 \text{ [N/mm}^2] \quad \dots (8)$

【理論解③】 式を用いると  $k = \frac{d}{2R} = \frac{8}{2 \times 20} = 0.2$  より

$$\tau_{\max} = \frac{16 \times 3,936 \times 20}{\pi \times 8^3} \left( \frac{4 - 0.2}{4 - 4 \times 0.2} + 0.615 \times 0.2 \right) = 1,026 \text{ [N/mm}^2] \quad \dots (9)$$

### 解析条件

Fig.4, 5 に解析モデルを示す。

- 要素：CASE-1 三次元はり要素 B31  
CASE-2 三次元ソリッド要素 C3D8I
- 材料定数：ヤング率  $E = 213.2 \text{ [GPa]}$   
ポアソン比  $\nu = 0.3$
- たわみ量： $\delta = 36 \text{ [mm]}$

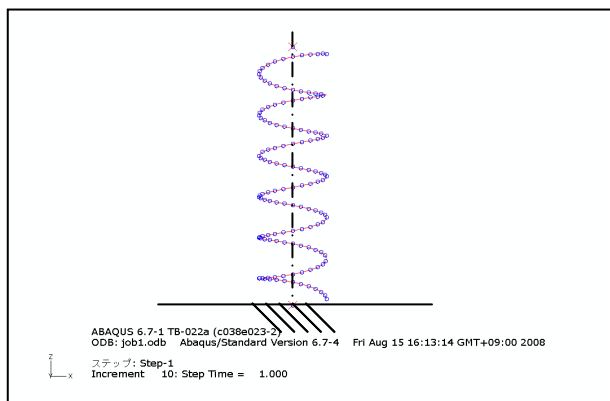


Fig.4 解析モデル CASE-1 はり要素

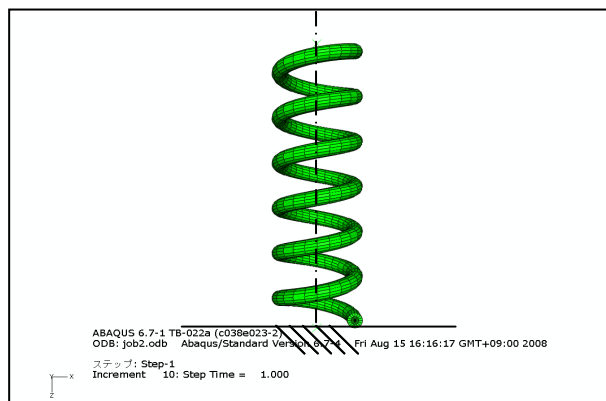


Fig.5 解析モデル CASE-2 ソリッド要素

### 解析結果

Fig.6~9 に Abaqus の解析結果を示す。

ソリッド要素の内側，外側のせん断応力の平均値は【理論解①】の値とほぼ同水準にある。また，この平均値ははり要素での結果と概ね一致する。

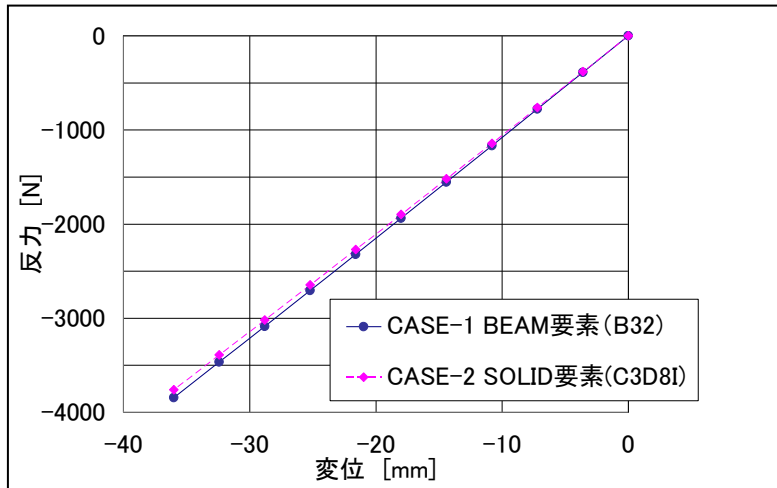


Fig.6 反力-変位関係

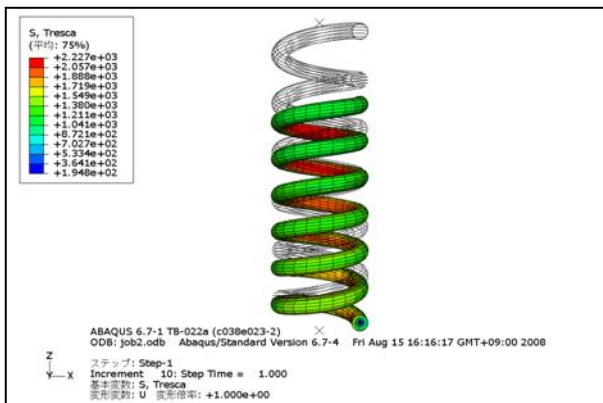


Fig.7 トレスカの分布

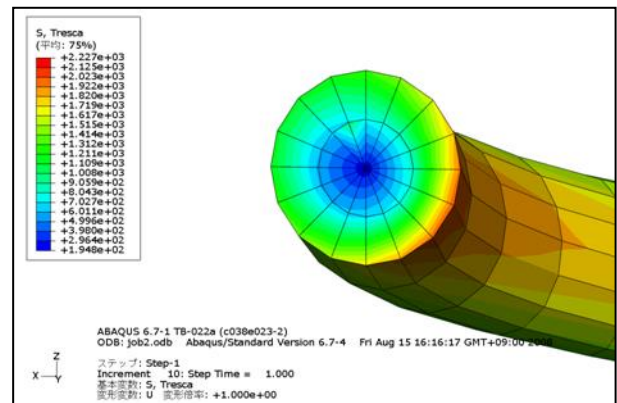


Fig.8 トレスカの分布(拡大図)

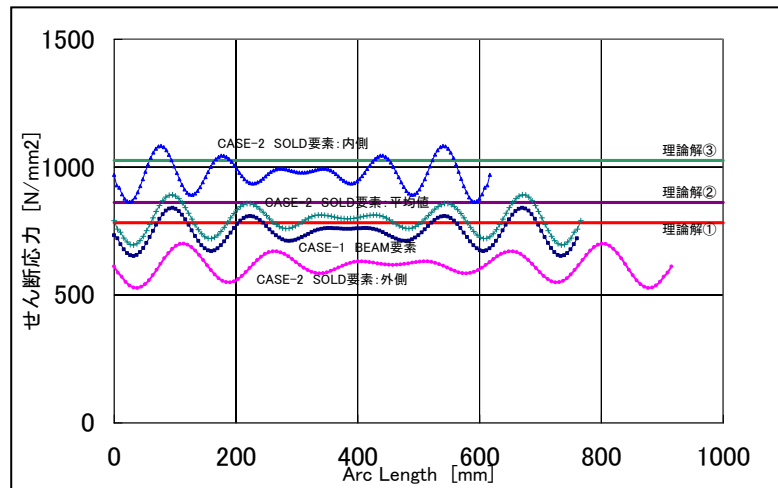


Fig.9 せん断応力

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ AbaqusはDassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です。

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail: comm@mech-da.co.jp http://www.mech-da.co.jp

Mechanical Design & Analysis Corporation