等分荷重を受ける円板

Disc with a uniform distributed load

R01_YT/2014/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★
提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

等分布荷重を受ける周辺を固定された円板を取り上げ，理論解と FEM 解と比較検討する．

理論解　中原，実践材料力学，p. 219　例題 1　参照[1]．

Fig.1 に示すような周辺を固定した円板がある．この円板が等分布荷重を受けるとき，中央に生ずるたわみ，及び最大応力を求める．諸元は以下の通りである．

円板の板厚　h=10[mm]　　　半径　a=500[mm]
ヤング率　E=2.0×10^5[MPa]　　　ポアソン比　ν=0
等分布荷重　p=0.2[N/mm^2]

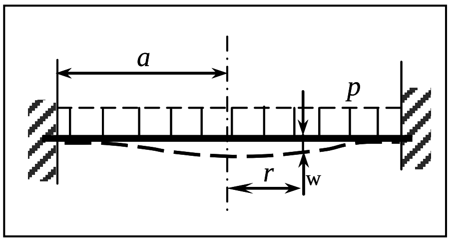

Fig.1　等分布荷重を受ける円板

材料力学による解は以下の通りである．
円板の曲げにおけるたわみの微分方程式

1. Fig.2 に示すような微小領域 abcd を考える．
円板の中心から外へ向かう半径方向の断面 Oa，Ob には，垂直応力 σ_θが生じ，円周方向の断面 ab，cd には垂直応力 σ_rおよびせん断応力 τ_{rz}が生ずる．これらの応力は板面に作用する p とつりあいの関係がある．

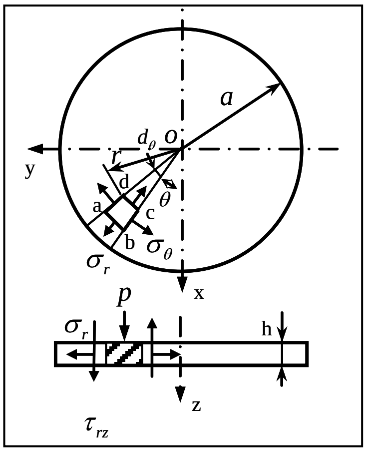

Fig.2　円板の軸対称曲げ

2. 上記の関係，および曲率半径とたわみの関係から円板の曲げにおけるたわみの微分方程式が導かれる．

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right\}\right]=\frac{p}{D} \quad \cdot\cdot\cdot(1)$$

3. (1)式の積分から本題での境界条件を適用し積分定数を求める．

4. まず，等分布荷重を受ける円板であることから次の条件が挙げられる．
   - 円板の中心におけるせん断力が　0
   - たわみが有限値

5. これにより たわみ，たわみ角，曲げモーメントは次のようになる．

$$w=\frac{pr^4}{64D}+\frac{c_2}{4}r^2+c_4 \quad \cdot\cdot\cdot(2)$$

$$\frac{dw}{dr}=\frac{pr^3}{16D}+\frac{c_2}{2}r \quad \cdot\cdot\cdot(3)$$

$$-\frac{M_r}{D}=\frac{3+\nu}{16}\cdot\frac{p}{D}r^2+\frac{1+\nu}{2}c_2 \quad \cdot\cdot\cdot(4)$$

$$-\frac{M_\theta}{D}=\frac{1+3\nu}{16}\cdot\frac{p}{D}r^2+\frac{1+\nu}{2}c_2 \quad \cdot\cdot\cdot(5)$$

6. さらに周辺固定円板であることから
   - 周辺 r=a において，たわみが　0
   - たわみ角も　0

7.　以上の境界条件により積分定数 c_2 , c_4 が定まるので，たわみは

$$w = \frac{p}{64D}(r^2 - a^2) \qquad \therefore\ w_{\max} = w_{r=0} = \frac{pa^4}{64D} = \frac{pa^4 \times 12(1-\nu^2)}{64Eh^3}$$

$$= \frac{0.2 \times 500^4 \times 12 \times (1-0)}{64 \times 2.0 \times 10^5 \times 10^3} = 11.72 \quad [\mathrm{mm}] \qquad \cdot\cdot\cdot (6)$$

8.　ここで，板の曲げ剛さは

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \cdot\cdot\cdot (7)$$

9.　曲げモーメントは,

中心において　$(M_r)_{r=0} = (M_\theta)_{r=0} = \dfrac{1+\nu}{16} pa^2 \qquad \cdot\cdot\cdot (8)$

周辺において　$(M_r)_{r=a} = -\dfrac{1}{8} pa^2 = -\dfrac{1}{8} \times 0.2 \times 500^2 = -6250 \quad [\mathrm{Nmm}] = \nu (M_r)_{r=a} \qquad \cdot\cdot\cdot (9)$

最大曲げモーメントは周辺 $r = a$ で生じるため応力も最大となる.

$$\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{\max} = \frac{|(M_r)_{r=a}|}{h^2/6} = \frac{6250}{10^2/6} = 375 \quad [\mathrm{N/mm^2}] \qquad \cdot\cdot\cdot (10)$$

解析条件

Fig.3 に解析モデルを示す.

- ■ 要　　素：軸対称シェル要素　SAX1
- ■ 材料定数：ヤング率　E=2.0×10^5 [MPa]
  　　　　　ポアソン比　ν=0
- ■ 荷　　重：　q　= 0.2 [N/mm²]

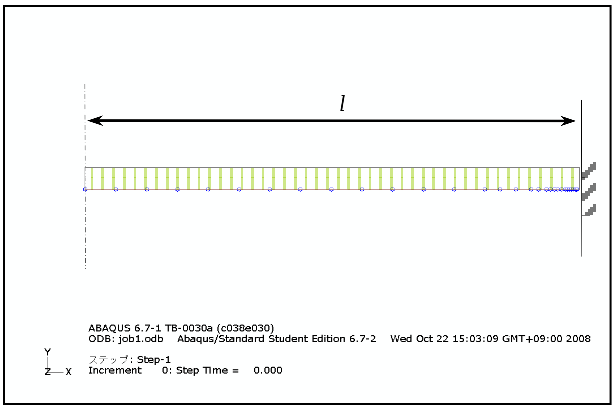

Fig.3　解析モデル

解析結果

Fig.4～5 に Abaqus の解析結果を示す．また得られた結果をまとめて Table.1 に示す.
理論解と一致する結果が得られた.

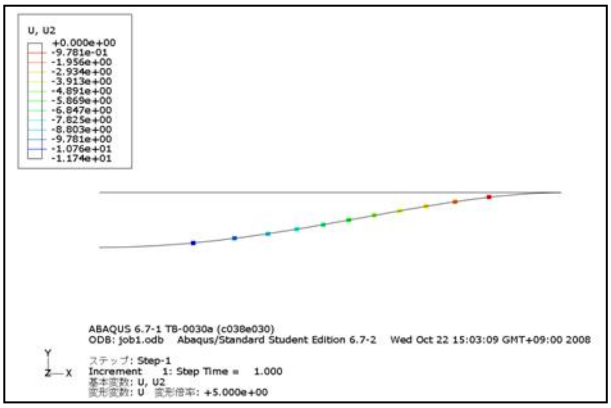

Fig.4　　たわみ

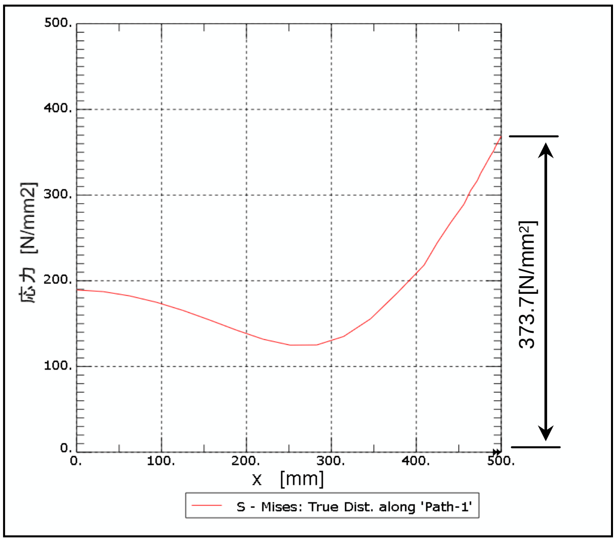

Fig.5　相当応力

Table.1　理論解と解析結果の比較

		理論解	FEM 解
たわみ	[mm]	11.72	11.74
最大応力	[MPa]	375.0	373.7

＊ FEM 解による最大応力は端部に現れる．このとき，Fig.5 からも分かるように外挿による理論値からのかい離が生じる．本例題では，端部のメッシュサイズを小さくすることによりこの影響を最小化している．

参考文献

（1）中原，実践材料力学，養賢堂，2002．

株式会社 メカニカルデザイン
〒182-0024　東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
TEL 042-482-1539　 FAX 042-482-5106
E-mail:comm@mech-da.co.jp　 http://www.mech-da.co.jp