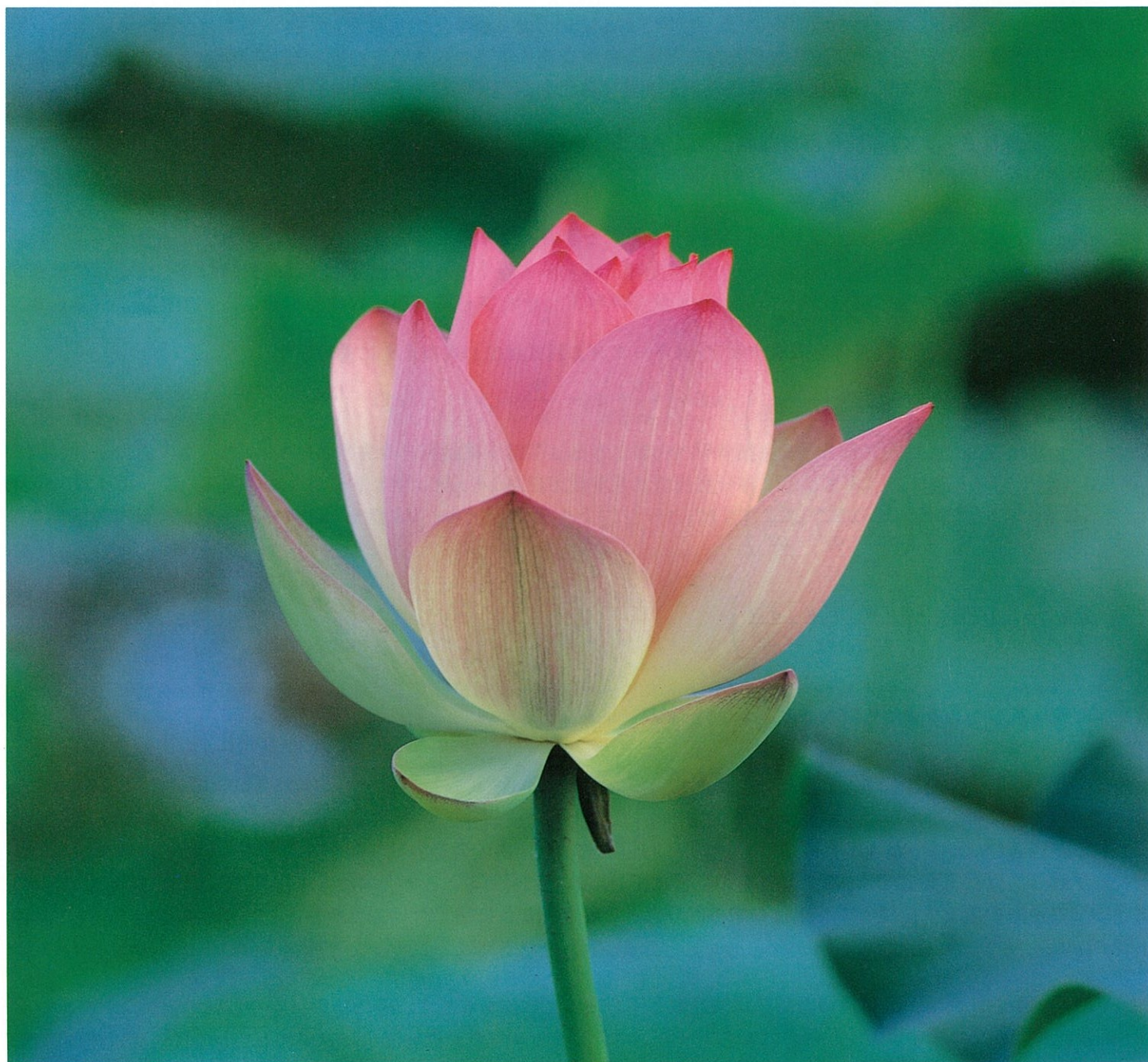


vol.98-1

# Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

May 1998



京都 天龍寺

## 【特集】MARC K7による流体解析

- ・ 厳密解のある定常・非定常流れ
- ・ 層流境界層流れ
- ・ 混合距離理論による乱流解析

**FEM** Consulting Services for Engineering Practice  
URL <http://www.mech-da.co.jp>

# MARC K7 による流体解析 Fluid Analysis using MARC K7

## 【1】はじめに

MARC プログラムでは、K7 から流体解析の機能が追加されました。従来の MARC でも、レオロジーの観点から剛塑性流れの手法を用いて粘性体の解析が可能でしたが、慣性の効果を扱うことができなかつたために、流体解析という部分的な視野から見た場合には、適用に大きな制限がありました。今回の K7 の機能は、それを補う立場にあります。

MARC のような構造系のプログラムの中で流体解析を利用する場合、熱や振動に関する流体連成問題の解明が主眼であることが多いと考えられます。しかし現実には、粘性による流れのはく離や乱流遷移など、横たわる溝は深く、工学的に価値のある結論に結びつけることは容易ではありません。微細な流れ構造を知ることは勿論重要ですが、境界層厚さや抗力といった巨視的で時間平均的な見地から連成効果を判断することが第一の課題と考えられます。

このような視点に立ち、K7 の流体解析機能を検証することを目的として、厳密解のある定常・非定常流れ、境界層、更に混合距離仮説を用いた乱流解析を行った結果を紹介します。尚、本稿の作成にあたっては、日野幹雄先生の最近の著作<sup>(1)</sup>を広く参照させて頂きました。

## 【2】粘性流体の方程式

慣用的な表記に従うと、粘性流体を表すナビヤ・ストークス方程式は (2.1) 式のように書けます。

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \cdots \cdots (2.1) \\ \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

あるいは 
$$\frac{Dv}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 v \cdots \cdots (2.2)$$

ここに、 
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \nu \text{grad}$$

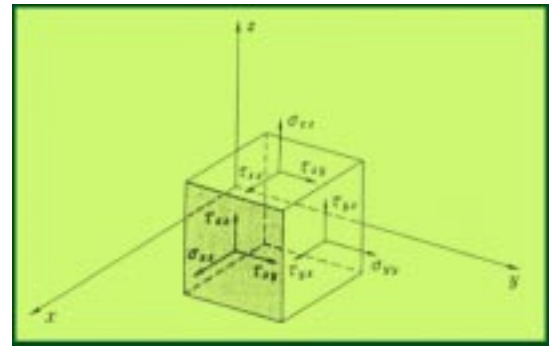


Fig.2-1 微小流体塊に作用する応力 Stress Tensor

(2.2) 式の左辺  $Dv/Dt$  はいわゆる慣性項です。また、右辺の第 1 項である質量力は特別なものでないので、流体力学的には特に取上げる必要はありません。例えば重力の影響は圧力項の中に入れることができます。右辺の第 2 項は圧力項であり、第 3 項は粘性力の項です。従って、流体の微小部分をとるとき、これに働く力は、慣性力 -  $Dv/Dt$ , 圧力 -  $\text{grad} p$ , 粘性力の 3 つです。流体の運動はこの 3 つの力のつりあいの上に成り立っています。すなわち、

- (1) 粘性が小さければ、流体場の力関係は慣性力と圧力項により決まります。その極限は完全流体の流れ(ポテンシャル流れ)となります。よく誤解されがちですが、ポテンシャル流れに近い流れは遅い流れではなく、実は速い流れ、すなわち粘性力が慣性力に対して無視しうる Re 数が十分大きい流れです。
- (2) 慣性力が小さければ、圧力項と粘性力ががつりあいの関係にあります。これは遅い流れです。
- (3) もし慣性力と粘性力が同じ程度の大きさであり、そのいずれも無視しえないとすれば、問題はきわめて難しくなります。この 2 つの力の大きさの比をレイノルズ数と定義します。流れと構造物の干渉、すなわち境界層の発達やはく離といった問題は、いずれもこの慣性力と粘性力が拮抗する領域に入ります。

$$R = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{U \partial U / \partial l}{\nu \partial^2 U / \partial l^2} \approx \frac{U(U/l)}{\nu(U/l^2)} = \frac{U l}{\nu} \cdots \cdots (2.3)$$

ここに、U : 代表的流速, l : 代表的長さ,  $\nu$  : 動粘性係数

### 【3】厳密解の得られる流れ

ナビア・ストークス式を境界条件に従って解こうとすると、流れが層流であり、レイノルズ数があまり大きくないという条件をつけても、慣性項が非線形であるため、この方程式を厳密に解くことは一般に困難です。わずかに、境界壁の影響を強く受ける流れにおいて、非線形項が自動的に消滅するか、あるいは方程式系が常微分方程式で置換えられるような場合に厳密解を求めることができます。一方、物体周辺の流れについては、レイノルズ数が小さく、非線形項の省略（ストークスの近似）あるいは線形化（オゼーンの近似）が許される場合に解析的に解を求めることができます。ここでは、定常および非定常流れの中から厳密解の得られる代表的なものを選び解析してみました。

#### 3.1 円管の定常流れ

##### (1) ニュートン流体

粘性のモデル化の中で最も代表的なものがニュートン流体です。せん断応力  $\tau_{zr}$  は (3.1) 式のようにずり速度  $D$  に比例する形で表現されます。  $\mu$  は粘性係数です。円管流 ( $z$ : 軸方向、 $r$ : 半径方向) について (3.1) 式を書き改めると (3.2) 式ようになります。式中の  $\dot{\epsilon}_{zr}$  はテンソルの定義に従っており、工学の定義の  $D = dv_z/dr$  の  $1/2$  になっていることに注意してください。

$$\tau_{zr} = \mu D \quad \dots \dots (3.1) \quad \tau_{zr} = \mu \frac{dv_z}{dr} = 2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) \approx 2\mu \dot{\epsilon}_{zr} \quad \dots \dots (3.2)$$

この分野を代表する R.B. Bird(2)(3) の著書から理論解を参照します。管内の平均流速  $\langle V_z \rangle$  は、流量  $Q$ 、円管半径  $R$ 、圧力勾配  $dp/dz$  を用いて (3.3) 式ようになります。 Fig. 3-1 に無次元化された流速分布を示します。この図と直接比較するため、ここでは、 $R=1$ ,  $dp/dz=-1$  とし、また  $\langle V_z \rangle = -1$  となるように  $\mu = 0.125$  と設定して解析を行います。

$$\langle V_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad \dots \dots (3.3)$$

##### (2) 非ニュートン流体

非ニュートン流体の代表的な例として、ここでは (3.4) 式で表される、べき乗則流体を取り上げます。先に (3.1) 式に示したニュートン流体は、(3.4) 式で  $m=\mu$ ,  $n=1$  とした特別な場合に相当します。円管流について (3.4) 式を書き改めると (3.5) 式ようになります。

$$\tau_{zr} = m D^n \quad \dots \dots (3.4) \quad \tau_{zr} = m \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n = 2m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \left( \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) = 2m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \dot{\epsilon}_{zr} \quad \dots \dots (3.5)$$

このとき、見かけの粘性  $\tau_{zr}/D$  が正値となるように絶対値処理が必要になる点に注意が必要です。速度分布の理論解は (3.6) 式の通りです。このとき  $R=1$ ,  $dp/dz=-1$  とし、べき乗則の指数として  $1/3$  を仮定します。ニュートン流体のときと同じく  $\langle V_z \rangle = -1$  となるように、 $m = 0.27516$  と設定して解析を行います。

$$\langle V_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R}{(1/n)+3} \left( \frac{R}{2m} \left| \frac{dp}{dz} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots \dots (3.6)$$

尚、粘性の仮定の方法にかかわらず、運動方程式よりせん断応力  $\tau_{zr}$  は (3.7) 式を満足します。従って、上記のニュートン流体及びべき乗則流体に対して得られるせん断応力の分布は同一であり、 $r=R$  すなわち壁面では (3.8) 式の値  $w$  となります。今回は  $R=1$ ,  $dp/dz=-1$  であるので、 $w = -0.5$  となることを確認します。

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{zr}) \quad \dots \dots (3.7) \quad \tau_w = \frac{1}{2} R \frac{dp}{dz} \quad \dots \dots (3.8)$$

##### (3) 解析結果

メッシュ分割を Fig.3-2 に示します。円管内の流体部分を軸対称要素でモデル化しました。半径方向 10 分割、軸方向 1 分割のモデルです。流体は円管内壁に付着しているので、外径部における軸方向速度は 0 とします。またモデルの側面に等分布荷重を加え、軸方向に圧力勾配が発生するようにしました。粘性の評価は、ISOTROPIC と STRAIN RATE の組合せ、あるいは、ユーザ・サブルーチン UNEWTN を用いて定義しました。

Fig. 3-3 に流速分布を示します。 Fig. 3-1 の理論解と一致する結果が得られました。また Fig. 3-4 にせん断応力分布を示します。壁面において (3.8) 式の結果、すなわち  $w = -0.5$  となることがわかります。

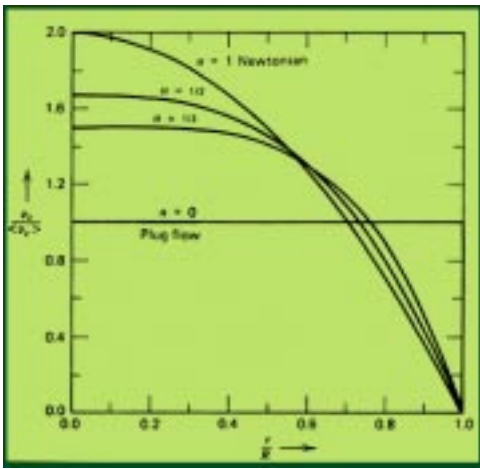


Fig.3-1 円管内の流速分布 (理論解<sup>(2)</sup>)  
Pipe Flow (Theory)

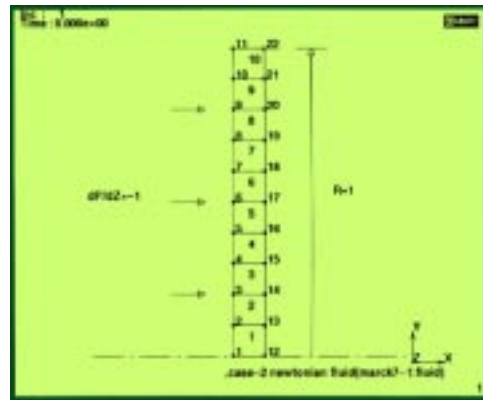


Fig.3-2 円管内流体のメッシュ分割  
Axisymmetric Model

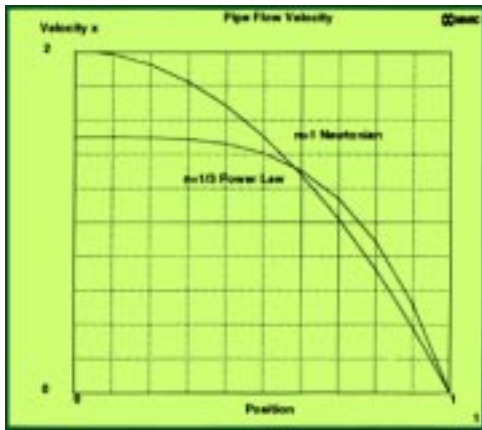


Fig3-3 円管内の流速分布 (FEM)  
Pipe Flow (FEM)

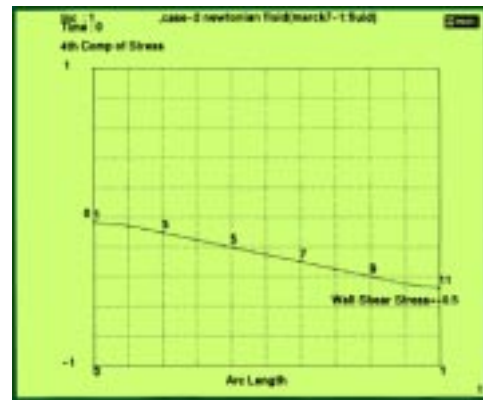


Fig.3-4 せん断応力分布  
Shear Stress

### 3.2 平板上の非定常流れ

#### (1) 動き出す平板 (ストークスの第1問題)

次に、無限に長い平板が瞬間的にある一定速度  $U_0$  で、その面の方向に運動しだす場合の流れについて考えてみましょう。この問題はストークスの第1問題と呼ばれ、流れは非定常平行流です。この問題は一見実用的意味がないように思われるかもしれませんが、実は粘性の作用を理解する上できわめて重要です。ここで、平板の面に沿い  $x$  軸、それと直角に  $y$  軸を取ります。圧力  $p$  は流れの場に通じて一定と考えられるので、ナビエ・ストークスの方程式は (3.9) 式ようになります。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots \dots (3.9)$$

この放物型の偏微分方程式は熱伝導方程式と呼ばれ、適切な独立変数を導入することによって常微分方程式に帰着し、誤差関数で表される解が得られることが知られています。<sup>(4)</sup>

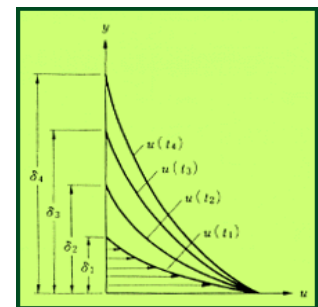


Fig.3-5 急に動き出す平板上の流速分布  
(理論解) ストークスの第1問題

Suddenly Accelerated Plane; Stokes's First Problem

Fig. 3-5 からわかるように、板の運動の影響は時間  $t$  とともに徐々に遠方に伝えられます。このときの流速分布は  $y$  座標のスケールを変えることにより相似形となります。粘性の影響が遠方に及ぶ範囲を表す目安として、流速  $u$  が壁面速度  $U_0$  の約 0.5% に落ちる高さを取り、これを  $y = \delta(t)$  と定義すると、(3.10) 式が得られます。

$$\delta = 4\sqrt{\nu t} \quad \dots \dots (3.10)$$

この式は、壁面の運動の記憶が粘性により  $\delta/t = 4\sqrt{\nu/t}$  の速さで (時間が経つほど、また粘性が小さいほどゆっくりと) 遠方に伝えられるというように解釈され、次章に示す層流境界層の概念に結びつきます。

### ナビア・ストークスの式

(Louis Marie Henri Navier, 1785-1836)

粘性を考慮した流体の運動方程式を最初に誘導したナビアは土木技術者であり、吊橋の設計を専門としていました。吊橋は長いスパンを渡すのに最も適したタイプの橋ですが、それでも河の流れの中に橋脚を立てる必要があります。しかし完全流体の理論では、ダランベールのパラドックスが教えるように、橋脚に働く抗力は零になってしまいます。この現実との矛盾は粘性を無視したことによるものです。

ナビアは 1822 年、粘性の効果を考慮した流体の運動方程式に関する論文を提出しました。その後、コーシー (1828)、ポアソン (1829)、サンブナン (1843) らによって同様の試みが提案され、1845 年、ストークスによって一般的な定式化が完成されました。

#### (2) 振動平板上の流れ (ストークスの第 2 問題)

平板を単調に変位させる問題から、振動させる問題に拡張すると更に興味深い結果が得られます。運動方程式は同じく (3.9) 式であり、境界条件は次式で与えられます。また解は (3.12) 式の通りです。

$$u = U_0 \cos \omega t \quad (y=0)$$

$$u = 0 \quad (y \rightarrow \infty)$$

$$u(y,t) = U_0 e^{-\eta y} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\text{ここで, } \eta = \sqrt{\omega/2\nu} = y/\delta \text{ また } \delta = \sqrt{2\nu/\omega} \dots \dots (3.12)$$

Fig. 3-6 に示されるように、壁の運動の影響は壁面を遠去かるにつれて距離と共に指数的に減衰し、その距離に比例した位相  $\phi = y\sqrt{\omega/2\nu}$  だけ少しずつ遅れて遠方に伝達されます。

Fig.3-7 はこれを MARC により解析した結果です。速度境界の振動は、ユーザ・サブルーチン FORCDT で与えました。Fig.3-6 に一致する解が得られ、慣性項の効果が適切に表現されていることがわかります。

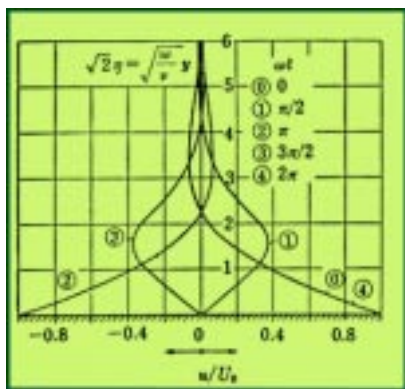


Fig.3-6 振動平板上の流速分布 (理論解) ストークスの第 2 問題  
Flow Near An Oscillating Plate; Stokes's Problem

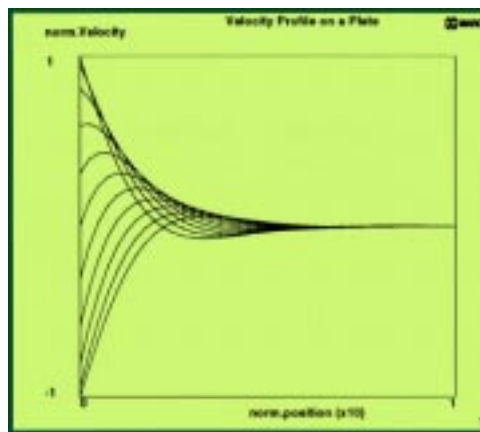


Fig.3-7 振動平板上の流 (FEM)  
Velocity Profiles on An Oscillating Plate(FEM)

## 【4】境界層問題への応用

### 4.1 壁面による流れの拘束と境界層

流れと構造物の相互作用は、構造物の表面において滑りがなく、流れが壁面によって拘束されているという点に特徴づけられます。分子論的にみると流体の分子は、あらゆる方向に不規則な運動をしており、その平均がマクロないわゆる流速

です。こうした自由に運動する流体分子が固体の空間に飛び込み固体分子と衝突すると前進速度を失い、乱反射されます。その結果、壁面の流体の速度はこれらの分子速度の平均として 0 となります。

一方、流れを高速化してゆくと Re 数が増加し、この極限 Re での流れはポテンシャル流にほかなりません。しかし、良く知られているように、定常な非粘性ポテンシャル流れの中の物体には抵抗が働かない(いわゆるダランベールのパラドックス)<sup>(5)</sup>ので、一見ナビア・ストークスの方程式が矛盾を含んでいるように見えます。しかし、実はポテンシャル流では物体の壁面での法線流速が 0 という条件だけで解が求まり、壁面での滑りなし(接線流速成分が 0)の条件は満たされていません。このことは Re により、偏微分方程式の最高階の項が消えて、境界条件の数が少なくてもよいことに対応しています。

一方、いかに、Re 数が高くとも実在の粘性流体は物体の表面で流速は 0 であり、壁近くではこの状態から急激にポテンシャル流の状態に移ります。このように壁の近くには、せん断変形速度の大きい、従って粘性の作用の無視しえないごく薄い層が存在します。これを境界層と呼び、プラントル(Prandtl,1904)によってその概念が導入されました。

## 4.2 層流平板境界層の数値解

定常な一様流中におかれた平板上の層流境界層の方程式および境界条件は次式の通りです。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots (4.1) \quad u=v=0 \quad (y=0), \quad u=U \quad (y=\infty) \dots \dots (4.2)$$

(3.10) 式に示したストークスの第 1 問題から類推されるように、粘性効果の及ぶ範囲である境界層の厚さ  $\delta$  は  $\sqrt{\nu t}$  に比例すると考えられます。ここで時間  $t$  を、流れが物体の存在を感知してからの経過時間であると見なせば、主流速  $U$  と物体の先端からの距離  $x$  に関し、 $t=x/U$  と書けます。従って、流体が平板の先端から距離  $x$  だけ進んだ場所では、壁の影響は粘性により  $\delta \sim \sqrt{\nu x/U}$  程度外側に及んでいると考えられます。

更に、ストークスの問題でこの長さ  $\delta$  に関して流速分布の無次元表示ができたと同じように、境界層の流速分布も、境界層外縁の流速と境界層厚さを基準として次式のように仮定することができるでしょう。この仮定により独立変数を  $x, y$  から 1 個だけに減らすことができます。

$$\frac{u}{U_\infty} = f_\eta(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_\infty}} = \frac{y}{x} Re_x^{1/2}, \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \dots \dots (4.3)$$

更に、流れ関数を導入して (4.1) 式を常微分方程式化し、級数展開を用いて数値解を求めます。Table4-1 はこのようにして求めた無次元流速分布を示します。また、流速  $u$  が主流  $U$  の 99% に達する位置で境界層厚さ  $\delta(x)$  を定義するものとし、

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) = 0.99 \quad \dots \dots (4.4)$$

そのときの無次元高さ  $\eta$  を Table4-1 より求めると、 $\eta = 4.91 \approx 5.00$  です。従って、(4.3) 式より、次式が求まります。

$$\delta(x) \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 5.0 x Re_x^{-1/2} \quad \dots \dots (4.5)$$

ところで、上の (4.1) 式は運動方程式の  $x$  成分ですが、もともとのナビア・ストークスの方程式のそれと比べると、右辺から  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  の項が消えただけで形の上では大した変わりはないように見えます。しかし、式の物理的性質は大きく変化しています。ナビア・ストークスの方程式は  $x, y$  方向の最高次の微分はともに二階です。これは数学的には楕円形の偏微分方程式と呼ばれるものであり、流れ場は無限遠の上流および下流の影響を受けます。

ところが、プラントルの境界層方程式は  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  の項を欠き、 $x$  軸方向の最高次の微分は一階で、 $y$  軸方向の最高次微分が二階となります。これは放物型の偏微分方程式に分類され、流れは上流の影響で決まり、一方向に積分を進めることが可能となります。この結果、問題の解法は非常に容易となります。以上の境界層理論は層流境界層に関するものですが、境界層の概念そのものと取扱い方は乱流境界層にもそのまま拡張することができます。

## 4.3 FEM 解

Fig.4-1 に解析結果を示します。流体として常温の水を想定しました。解析範囲は  $100 \times 100\text{mm}$  であり、図中左側から一様流速  $U$  で水が流入し、モデルの下辺を平板表面と仮定して境界層の発達を解析しました。

Tble4-1 層流平板境界層の無次元流速分布<sup>(1)</sup>  
Velocity Profile for Boundary Layer along a Flat Plate

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$	$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$
0	0	0	0.33206	4.8	3.8828	0.98289	0.02948
0.2	0.00664	0.59643	0.33199	4.8	3.9834	0.98779	0.02187
0.4	0.01658	0.53777	0.33147	5.0	3.9839	0.98130	0.01584
0.6	0.03174	0.49894	0.33088	5.2	3.9818	0.98425	0.01134
0.8	0.05111	0.46473	0.33029	5.4	3.9804	0.98655	0.00783
1.0	0.07467	0.43479	0.32965	5.6	3.9811	0.98748	0.00543
1.2	0.10236	0.40878	0.32898	5.8	3.9790	0.98826	0.00365
1.4	0.13428	0.38627	0.32827	6.0	3.9764	0.98888	0.00243
1.6	0.17052	0.36676	0.32757	6.2	3.9743	0.98937	0.00158
1.8	0.21128	0.34977	0.32683	6.4	3.9728	0.98981	0.00088
2.0	0.25662	0.33477	0.32605	6.6	3.9721	0.99027	0.00046
2.2	0.30660	0.32132	0.32525	6.8	3.9724	0.99087	0.00027
2.4	0.36130	0.30899	0.32443	7.0	3.9735	0.99160	0.00012
2.6	0.42082	0.29746	0.32360	7.2	3.9752	0.99246	0.00007
2.8	0.48519	0.28652	0.32275	7.4	3.9774	0.99346	0.00004
3.0	0.55442	0.27616	0.32188	7.6	3.9801	0.99459	0.00002
3.2	0.62861	0.26638	0.32100	7.8	3.9832	0.99583	0.00001
3.4	0.70786	0.25717	0.32011	8.0	3.9867	0.99717	0.00000
3.6	0.79228	0.24852	0.31921	8.2	3.9915	0.99860	0.00000
3.8	0.88198	0.24043	0.31830	8.4	3.9975	0.99999	0.00000
4.0	0.97706	0.23290	0.31738	8.6	4.0047	1.00000	0.00000
4.2	1.07764	0.22593	0.31646	8.8	4.0130	1.00000	0.00000
4.4	1.18382	0.21952	0.31554				

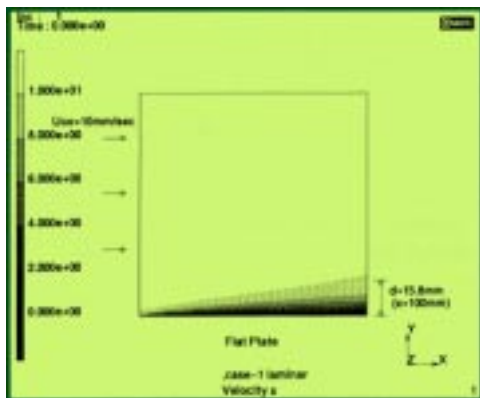
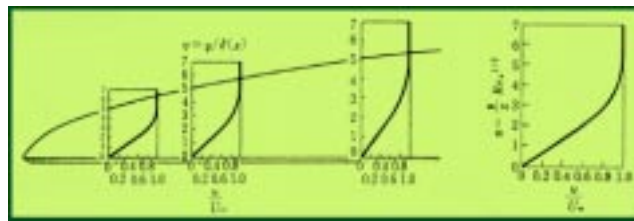


Fig.4-1 解析モデル  
Boundary Layer Model

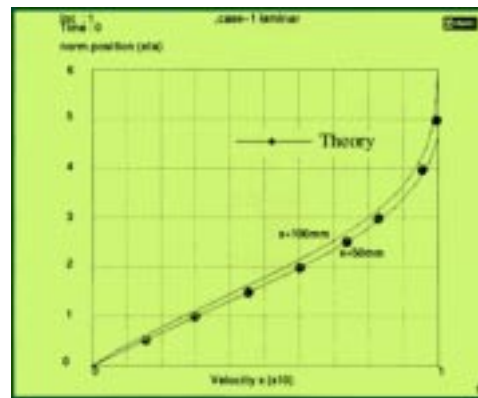


Fig.4-2 層流平板境界層の流速分布 (FEM)  
Velocity Profile of Laminar Boundary Layer(FEM)

プラントルの境界層理論  
(Ludwig Prandtl, 1875-1953)

1904年、ハイデルベルクにおいて開催された第3回国際数学学会に、プラントルは、流体力学に関するごく短い論文を提出しています。これは流体運動に関する非線型微分方程式の解法について、今日境界層理論と呼ばれている新しい考え方を導入したものでした。この論文は、ゲッチンゲン大学の数学者クライン (Felix Klein) によって認められ、プラントルは 20 代の若さでその応用力学研究所長に任せられます。ライト兄弟の初飛行はこの前年であり、航空機の発達と共に流体力学は進歩を遂げることになります。

カルマン渦の発見も、その端緒はプラントルの下で行なわれていた円柱からの境界層のはく離の実験にあります。しかし、この実験ではどんなに注意深く試みても円柱が振動するのを、プラントルは円柱の仕上げ精度の悪さに原因があると考えていたようです。当時、その助手であったカルマン (1911) は、これを円柱の後流に特有の現象として見直し、解明したことによって、この流れには彼の名が冠せられています。

	密度	=1.02 × 10 <sup>-10</sup> [ kg · sec <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup> ]
	動粘性係数	= μ / ρ =1.00 [ mm <sup>2</sup> /sec]
主流速度	: U	=10 [ mm/sec]
境界層厚さ	: x=100mm において	=5.0 √(νx/U <sub>∞</sub> ) =15.8 [ mm]

Fig.4-2 に x =50mm と 100mm での無次元化流速分布を示します。x によらずほぼ相似であり、Table4-1 の付図に一致することがわかります。

## 【 5 】 混合距離理論による乱流解析

### 5.1 レイノルズ応力と混合距離理論

Fig. 5-1 は、レイノルズが行った乱流の実験を示しています。水槽の横にパイプをひいて静かに水を流し、上流側から注入する色素により水の運動を観測すると、流量が少ない間は色素の糸はきれいに下流に流れますが、流量がある値を超えると急に色素は拡散し管路一杯に広がってしまいます。(2.3) 式に示した Re 数によってこの条件を整理すると、円管流れの場合の臨界値は約 2000 という値になります。Re 数がある値を超えるとということは、粘性項に比べ慣性項が重要性を増し、流れの方程式が非線形となることを意味しています。

すなわち、時間的に平均された流れに関しては円管内の流れは平行流であって非線形慣性項を欠きませんが、各瞬間瞬間については何もいえないのであり、つまるところ層流という流れの状態(ハーゲン・ポアズイユ流れ)はナビア・ストークス方程式の解の一つにすぎないと解釈することができます。

ここで、乱れによる流体の混合運動について考えましょう。流体塊が上下に移動し混合する距離が l であり、移動する流体塊の大きさや頻度はある確率分布にしたがい不規則に起こるものとします。壁面から y の高さの点には、従って高さ y+l あるいは y-l の点からそれぞれ u(y+l) あるいは u(y-l) の流速をもつ流体塊が飛び込んできて、その瞬間この点の流速は u(y) より

$$u(y \pm l) - u(y) \approx \pm l (du/dy) \quad \dots \dots (5.1)$$

だけ速くなったり遅くなったりします。流体塊の混合距離 l もある確率分布にしたがい不規則であるとすれば、この乱流混合モデルは Fig. 5-2 に示すように実際の乱流変動に似たものとなります。

流速の乱流成分 u', v' は不規則に変動し、その平均は 0 ですが、u' × v' は (5.1) 式のモデルからもわかるように統計的には、u' > 0 ならば v' < 0, u' < 0 ならば v' > 0 です。したがって、-u' · v' の平均は正の値となります。

このような乱流混合により、単位体積あたりの x 方向の運動量が (u ± u')= u(y ± l) である流体塊が、y 軸に直角な単位面積を通して、単位時間あたりに体積 (v') だけ y 軸の負の方向 (あるいは正の方向) に移動します。その結果、平均的に E [ (u ± u')(v') ] = E [ -uv' - u'v' ] の運動量が y 方向に輸送されます。

ここに、v' は流体塊の y 方向への輸送速度であり、E は統計的平均 (ensemble average) を意味します。従って、運動量の法則により y 軸に直角な単位面積には、輸送された運動量に等しい応力 τ<sub>yx</sub> が運動量成分の方向 (x 方向) に作用するものとみなせます。すなわち E[v']=0 を考慮すれば、

$$\tau_{yx} = -E[\rho(u + u')v'] = -E[\rho u'v'] = -\rho \overline{u'v'} \quad \dots \dots (5.2)$$

このような流れの乱流運動に伴う応力をレイノルズ応力と呼びます。乱流運動による運動量の輸送効果を、分子運動による粘性効果の表示 = μ du/dy になぞらえて、ブシネスク (1897) はレイノルズ応力を

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \epsilon \overline{du/dy} \quad \dots \dots (5.3)$$

と表現しました。ε は分子運動による分子動粘性係数 = μ / ρ に対応する渦運動効果を表すもので、渦動粘性係数 (kinematic eddy viscosity) と呼ばれます。ε と異なり ν は流体の性質では定まらず、流体運動の場所の関数となります。

(5.1) 式に示したように、ある点に生じる流速 u の変動分 u' は流体粒子の移動距離 l と、その間の平均速度の勾配 du/dy に比例します。v' も同じように平均速度勾配に比例すると考えられます。従って、√(α<sub>1</sub> l) (α<sub>1</sub>: u'v' の相関係数) をあらためて l と定義すれば、レイノルズ応力 -ρ  $\overline{u'v'}$  および渦動粘性係数 ε は次のように表されます。なお、これらの式の右辺の



絶対値記号は  $\tau = -\rho \overline{u'v'}$  の符号と  $d\bar{u}/dy$  の符号が一致するよう考慮したためです。以上の概念はプラントルの混合距離の仮説 (mixing length hypothesis) と呼ばれ、 $l$  を混合距離と呼びます。

$$u' \sim l_1 \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad v' \sim l_2 \frac{d\bar{u}}{dy} \dots \dots (5.4)$$

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \dots \dots (5.5)$$

$$\varepsilon = l^3 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \dots \dots (5.6)$$

### 5.2 乱流境界層の解析

平板上の流れも、Re 数が  $5 \times 10^5$  程度になると、乱流に遷移します。Fig. 5-4 は、この状況を水素気泡を一定時間刻みで発生させることによって可視化した写真です。参項文献 (1) より引用させて頂きました。壁面のごく近くを除けば分子粘性による項  $\mu du/dy$  は省略できて、せん断応力はレイノルズ応力によるものと考えられます。すなわち、(5.5) 式より (5.7) 式を仮定できます。更に、壁面近くの乱流運動は、壁面により拘束されるので混合距離  $l$  は (5.8) 式のように  $y$  に比例すると仮定することができます。これはカルマン定数と呼ばれ、実験的に 0.4 が与えられます。結果だけを示すと、このような仮定に基づく乱流境界層内の流速分布は、(5.9) 式のような対数分布形式を持ちます。

$$\tau \approx -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \dots \dots (5.7)$$

$$l = \kappa y \dots \dots (5.8)$$

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} + A \dots \dots (5.9)$$

すなわち、混合距離理論を用いれば、粘性モデルを差替えることで乱流の時間平均的な挙動を表現することができます。Fig. 5-5 に (5.7)、(5.8) 式の形に粘性係数を読替えて解析した結果を示します。乱流境界層の理論は、基本的に層流の延長上にあるので、非常に乱暴ですが、先の Fig.4-2 と同じ表記を採用しています。乱流によって運動量の移動が促進されるので、流速分布は層流に比べて太った分布となります。横軸を対数に直すと得られた分布は直線に乗り、混合距離仮説に従った結果となっています。

なお、この形式の流速分布は簡易に  $1/n$  乗 ( $n=6 \sim 10$  程度) の曲線に乗ると言われており、Fig. 5-5 には  $n=6$  としたときのプロットを示します。概ね傾向は一致しますが、壁面近傍では、粘性底層を考慮に入れる必要があるなど、精密化にはもう一步踏み込んだ検討が必要です。

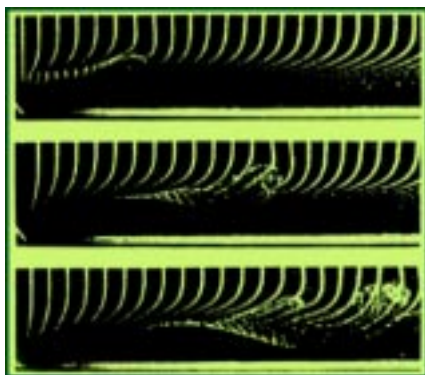


Fig.5-4 平板に沿う層流境界層の乱流への遷移  
Turbulent Boundary Layer Along a Flat Plate

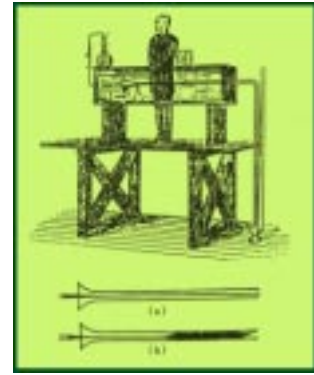


Fig.5-1 レイノルズの実験 (1883)  
Reynolds's Experiment of Turbulent Pipe Flow

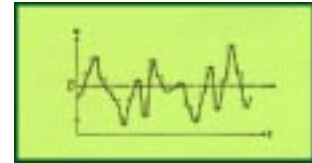


Fig.5-2 混合距離がある確率分布を持つモデル

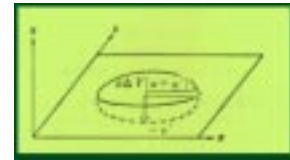


Fig.5-31

レイノルズの応力

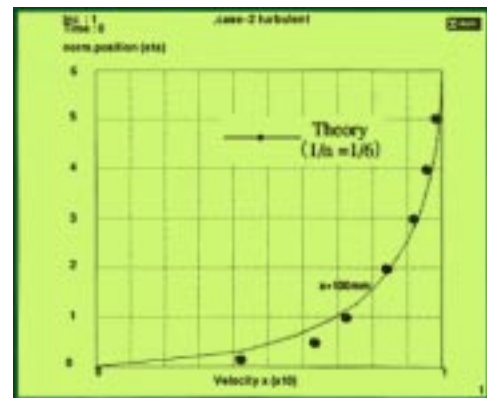


Fig.5-5 乱流平板境界層の流速分布 (FEM)  
Velocity Profile for Turbulent Boundary Layer(FEM)



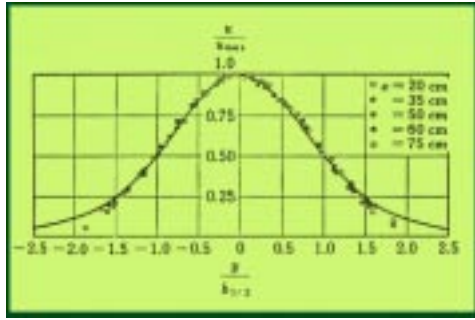


Fig.5-7 2次元噴流の流速分布  
(実測及び理論解)

Velocity Profile of Turbulent Jet(Theory & Experiment)

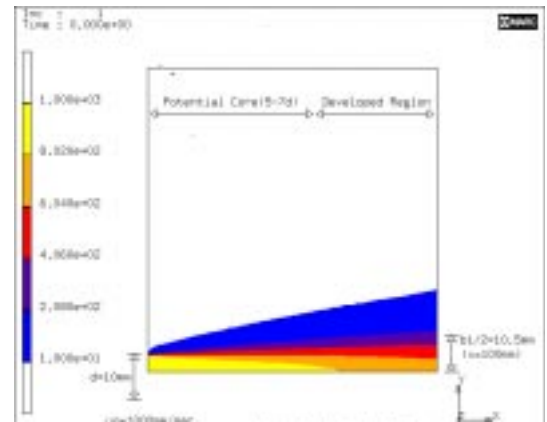


Fig.5-8 解析モデル  
Analysis Model

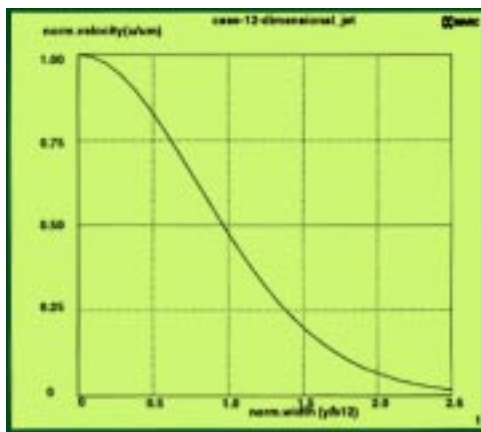


Fig.5-9 2次元噴流の流速分布 (FEM)  
Velocity Profile of Turbulent Jet(FEM)

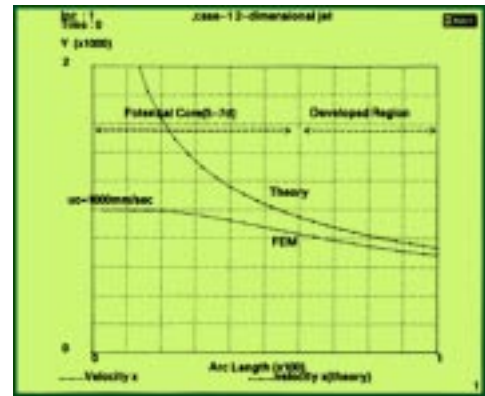


Fig.5-10 中心軸上の最大流速  
(理論解及びFEM)

Maximum Velocity on the Center Line(Theory & FEM)

参考文献

- ( 1 ) 日野, 流体力学, 朝倉書店, 1995.
- ( 2 ) R.B. Bird et al, Dynamics of Polymetric Liquids, Vol.1, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1987.
- ( 3 ) R.B. Bird et al, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, 1960.
- ( 4 ) 例えば、Mech D&A News, 非定常熱伝導と熱衝撃応力の厳密解, Vol. 95-4, 1995.
- ( 5 ) 例えば、Mech D&A News, 流体連成振動解析, Vol. 97-4, 1997.
- ( 6 ) F.R. Hama & J. Nutant, Proc. 1963 Heat Transf. and Fluid Mech. Inst., 1963.
- ( 7 ) P.E. Dimotakis, R.C. Lye, and D.Z. Papantoniou, 1981.
- ( 8 ) 日本機械学会, 機械工学便覧, A5-65, 1992.
- ( 9 ) H. Schlichting, Boundary Layer Theory, 7th ed., McGraw-Hill, 1979.

表紙：京都 天龍寺, 福島右門, 世界文化フォト

## 【乱流の発生とその組織的構造】

円管の流れを例にとると、 $Re$  数が約 2000 を超えると流れは層流から乱流に遷移します。しかし層流に対して理論解(ハーゲン・ポアズイユ流れ)を導いたとき、 $Re$  数に関する仮定を何ら与えていないにもかかわらず、実現象で乱流が形成されるのは奇異に感じられます。いま理論解を導くのに与えた仮定は、次の通りです。

- (a) 管は直管であり径は一様である。
- (b) 管の上下流端での圧力は時間的に変化しない。
- (c) 従って、流れは定常である。
- (d) また、流れは流下方向に一様である。

これらの条件は、管内流を思い浮かべたときに、一見、妥当であるように見えます。しかし、(c) と (d) は時間的平均流速については成立していますが、乱流状態の瞬間的な流速状態では成立していません。すなわち、 $Re$  数が大きい場合には、(a), (b) の仮定は正しくなく、流速は時間の関数となっていることとなります。

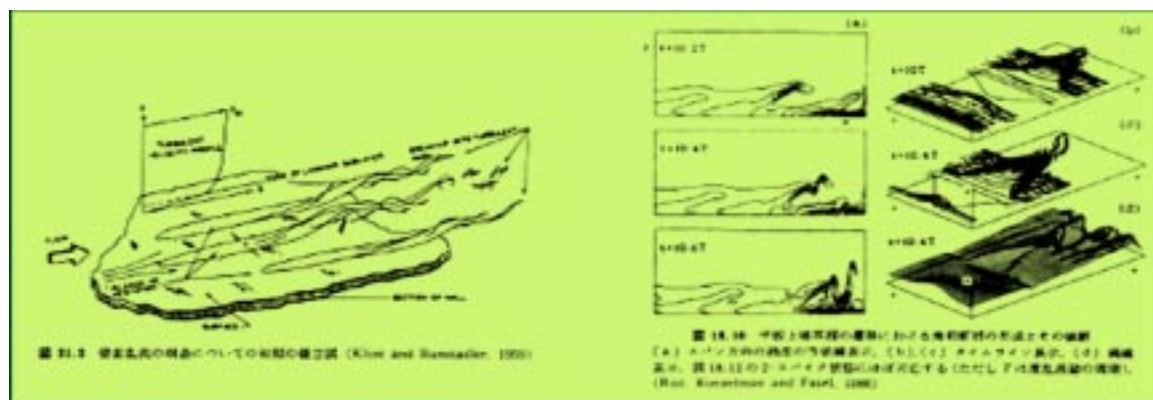
乱流への遷移は微小な擾乱が引き金となって発生することが知られています。臨界  $Re$  数とは、それ以上の領域で流れが乱流になることを示すのではなく、むしろ、それ以下の流れでは、どんなに乱れを与えても粘性の効果のために乱流という不安定な状態を維持することができず、鎮静化して層流に帰着すると解釈するのが妥当です。

このような観点から見ると、乱流の特徴がその不規則性にあるという通念は必ずしも正しくありません。乱流研究の初期においては、格子をよぎる流れに代表されるような、人為的に作られた一様な乱流がその糸口となりました。しかし現在では、このような一様乱流は例外的な流れであることが知られています。すなわち、微小な擾乱が乱流に発達し、最終的に細分化して消散してゆくという過程を維持させるには、そのエネルギーを補給するに足るより大きなスケールの流れ構造を伴うことが不可欠であるからです。

本文 Fig. 5-4 の平板境界層の例では、大きな渦を

伴う流れが壁面上で発生し、それが境界層外部へ向けて放出されているのが観察できます。また、Fig. 5-6 の自由噴流の例でも、噴流の幅寸法相当の大きな渦が規則的に形成され、周囲の静止流体を巻き込みながら下流に向かって発達している様子がわかります。

このような乱流の組織的構造(大規模渦)は、下図 21.2 に示す Kline とその一派によって実験的に指摘され、最近では下図 18.10 に示すように緻密な数値解析によって表現することが可能となっています。従って、今回のニュースレターに示したような混合距離仮説による解析は、極めて古典的なアプローチと思われるかもしれませんが、しかし他の数値解析、例えば振動解析や座屈解析と同様、時刻歴的な過渡応答を求める解析は工学的には脆弱な部分を持っています。すなわち、全体の挙動を大づかみに把握するには不向きであり、例えば振動解析でいえば、固有モードを知るといったような巨視的な側面からのバックアップが不可欠です。今回はこのような意図から、混合距離仮説に光を当ててみるものと致しました。皆様の御利用をお待ちしております。



平板境界層の乱流遷移<sup>(1)</sup>