

vol. 2005-2

Mech D & A News

Mechanical Design & Analysis Co.

December 2005



Edouard Manet, A Bar at the Folies-Bergères, 1882.

【特集】 粘弾性解析における諸問題 (その1 Maxwellモデルの基本的な性質)

*FEM Consulting Services for Engineering Practice
Find Innovation in Tradition 2008-2019*

今号から数回にわたり、粘弾性解析に関する諸問題と題し、弊社における動的粘弾性試験ならびに汎用 FEM を用いた検討結果^{(1),(2)}を取り上げてまいります。今回は、一般化 Maxwell モデルを用いた応力緩和形式の基本的なモデリングについて概説します。

【1】はじめに

プラスチックやゴムなどの樹脂材料は、応力緩和あるいはクリープと呼ばれる性質を有しています。時間の経過の下で、この性質は材料に流動的な振る舞いを与え、内部に生じていた緊張の弛緩をもたらします。金属や地盤のように、一見、硬質な材料であっても、高温の下や長い時間の経過の下ではこの流動的な振る舞いが現れ、いつかは流れ去ってゆきます。粘弾性という材料モデルは、弾性率を時間とともに減衰させ、このような弛緩の作用を表現しようとするものです。

材料に力が与えられたとき、それがどのように変形するかという問題は、きわめて古い課題です。しかし近代以前には変形という概念すらあいまいで、外観と重さだけを頼りに、それが壊れるか否かを問うことが精一杯だったでしょう。崩壊による機能の喪失に目を奪われてしまうことが大半であったと思われまふ。しかし破壊の形態は、材料の種類によっても、荷重の与え方によっても千差万別の結果を与えます。手当たり次第に破壊を観察することから離れ、それ以前の材料の挙動に注目できるようになるまでには、長い年月を必要としたと考えられます。

一方、固体と流体という区別も、当初ははなはだ曖昧な概念であったと思われまふ。固体であれば変形後もそれなりに形が維持されるのに対し、流体は流れ去ってゆきます。力と変形が因果関係にあるという前提に立ち、固体であれば力に比例した変位が発生する(弾性)、また流体であれば力に比例した速度が発生する(粘性)、という仮定に到達するには、やはり長い年月が必要であったと思われまふ。

弾性と粘性によって固体と流体を説明する試みは、それぞれ Hooke(1678 年)と Newton(1687 年)に起源があります。今でこそこれらの概念は当たり前のモデルとして扱われていますが、このような大胆な仮定によって初めて材料に関する秩序立った理解が可能になったことは、記憶しておいてよいと考えられます。Navier(1826 年)には、以下のような指摘があります⁽³⁾。

「構造物の弾性限界を知ることは極めて重要である。なぜなら弾性限度内であれば荷重と変形は比例し計算は簡単であるが、それを超えると永久変形の発生によって計算が複雑になり、破壊荷重を見出すことは困難になるからである。したがって新たな構造の設計においては、応力が弾性限度内にあるように寸法を決めればよい。」

「弾性」という秩序によって設計初期の段階での解決を図るという考え方は、おそらく現在においても正しい主張です。余談となりますが、以下に例を示しましょう。

【2】「弾性」という秩序

Fig.1 は、米国におけるボイラーの破裂事故の推移を示します⁽⁴⁾。ボイラーは、1700 年代の産業革命によって現れましたが、その後、使用圧力の向上にともなって破裂による事故を生ずるようになりました。事故件数は次第に増加し、1870 年から 1910 年にいたる 40 年間には、その合計は 1 万件に達しました。老朽化に伴ってクリープによるひずみが進行し、事故件数の急激な増大を招いたと言われています。

当時の技術水準ではクリープという現象を十分に理解することが難しかっただけでなく、入手可能な鋼材の性能、そしてそれを加工する技術にも大きな制約があったと考えられます。また、プラントの一部としてボイラーを運用するという経験、すなわちボイラーがシステムの一部であるという近代的な理解が十分でなかったことを考えると、携わる人々の利害は激しく対立し、事故件数だけがいたずらに増加するという経過をたどったと推測されます。

1911 年に至り、米国機械学会(ASME)による規格制定の事業が始まりました。制定のための委員会には、製造者から保険会社にいたる広い分野からの参画が求められ、平準な規格を制定することが試みられたと言われています。材料の手配に始まり、設計、製造、検査、保守からなる一連のプロセスに対して、偏りのない規格を与えるという考え方は、その後の ASME 規格に一貫する姿勢です。

ボイラーの損傷には、クリープによる経年的な劣化を主因とするほか、原因不明を含め、様々な要因があったに違い

ありません。しかし規格を制定するにあたっては、まず肉厚を確保し、内圧による応力(1次応力)を低減することに主眼が置かれました。損傷の形態はさまざまあるにせよ、Navier が言うように弾性限界内に応力を制限すれば、なんとか手の届く範囲に物事を収められるという判断が働いた結果であると思われます。

この結果、事故の件数は絶無にはならないものの、Fig.1 に示すように大幅な減少を見ました。弾性という単純な目標によって混乱を断ち、第一次的な秩序が達成されたと考えられます。

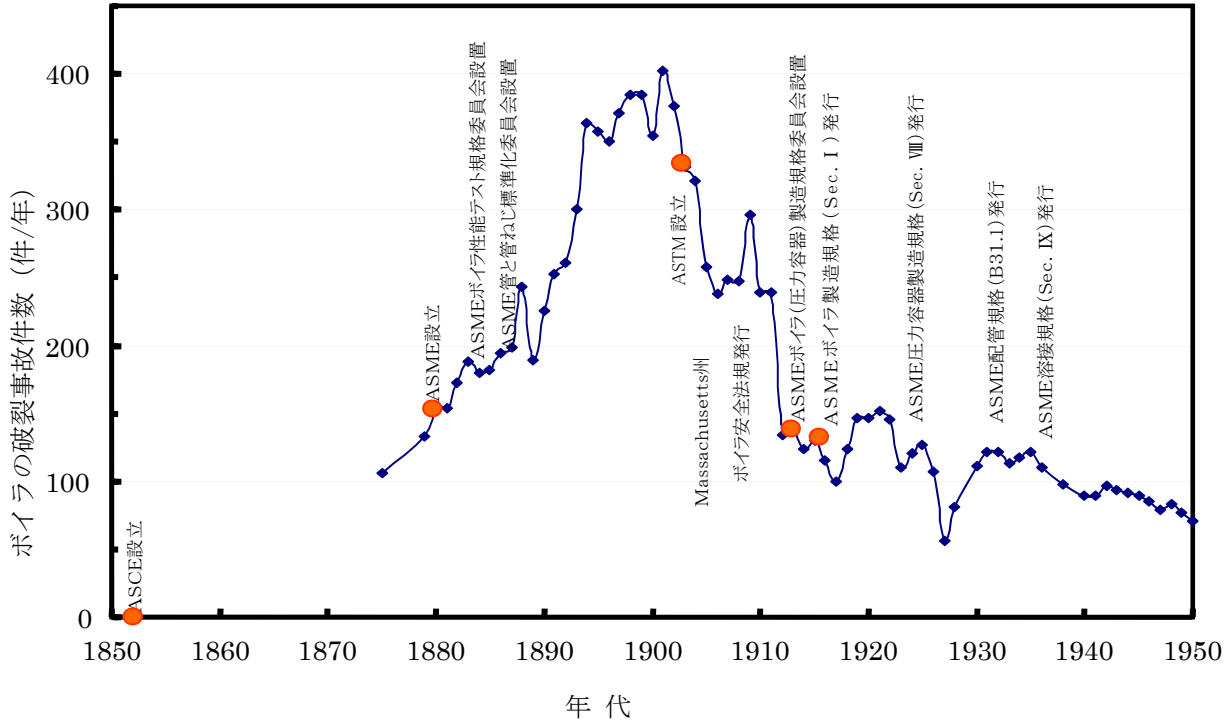


Fig.1 米国におけるボイラーの破裂事故と設計規格の制定⁽⁴⁾

【3】Maxwell モデル

一方、近代的な化学工業を背景にして現れた材料科学の分野には、このような見方に満足できない人々があったことを否定できません⁽⁵⁾。すでに 1835 年には、弾性余効、すなわち観測時間を十分に長くすれば固体も流れるという現象が Weber によって見出されていました。これは、固体は弾性、流体は粘性という単純な切り分けでは律しきれない現象です。

Maxwell は、1868 年に粘性以外に弾性的挙動を示す流体、すなわち粘弾性流体の存在を指摘しました。Fig.2 にその概念的なモデルを示します。このモデルは Hooke 弾性を表すばねと Newton 粘性を表すダッシュポットを直列につないで構成されています。この Maxwell モデルに応力 σ を与え、ばねがひずみ ϵ_1 だけ伸び、ダッシュポットは ϵ_2 だけ伸びたとすると、全体のひずみ ϵ は、

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \dots (1)$$

ばねの弾性定数を E とすれば、Hooke の法則より(2)式、またダッシュポットについては粘性係数を η とすれば Newton の粘性法則より(3)式が与えられます。直列なので、ばねとダッシュポットに発生する応力は等しいことに注意してください。

$$\sigma = E\epsilon_1 \quad \dots (2)$$

$$\sigma = \eta d\epsilon_2/dt \quad \dots (3)$$

(1)式を時間 t で微分し、(2)式、(3)式を代入すると、次式が得られます。

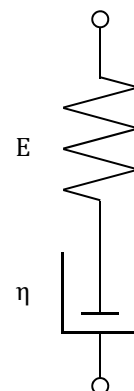


Fig.2 Maxwell モデル

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \dots (4)$$

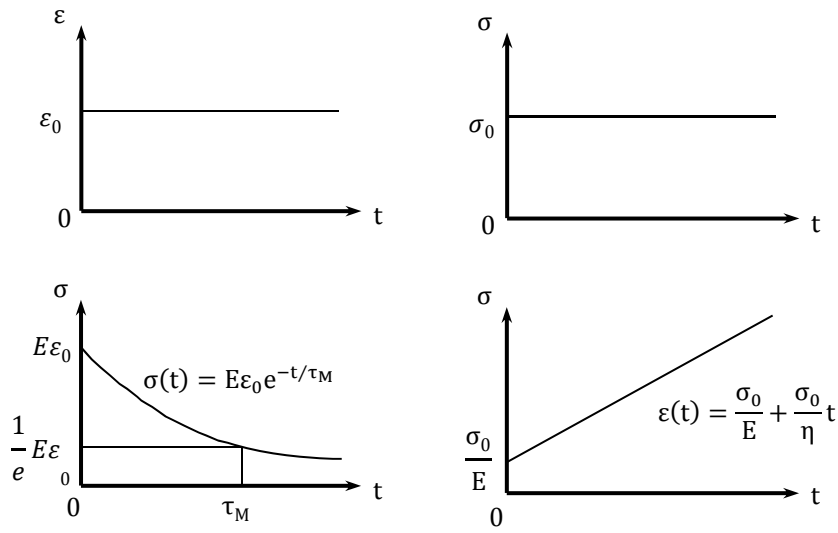
いま Fig.3(a)に示すように、時間 $t=0$ でひずみ ε_0 をこの Maxwell モデルに与え一定に保持する条件を考えると、(4)式は一次の常微分方程式となるので、(5)式のような応力の応答が得られます。ここで τ_M は(6)式のように定義され、時間の次元をもつ定数です。

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-t/\tau_M} \quad \dots (5) \qquad \tau_M = \eta/E \quad \dots (6)$$

(5)式の応答を Fig.3(a)に示します。時間 0 ではダッシュポットは凍結して動かないため、与えられたひずみに対応する応力 $E\varepsilon_0$ がばねに発生し、その後、ダッシュポットが緩むにしたがって応力は指数関数的に減少し 0 に近づいてゆくことがわかります。このような挙動を応力緩和と呼びます。なお時間 $t=\tau_M$ では、応力は最初の値の $1/e$ にまで減少します。したがって τ_M は、Maxwell モデルの応力緩和の程度を表す定数で、緩和時間と呼ばれます。

応力が 0 になってしまうと、その後、モデル両端の保持を解除しても発生したひずみは回復することができず、永久変形として残ることに注意してください。例えばチューインガムを急激に引き伸ばし、すぐに離せば形状は回復しますが、数秒ほど引き伸ばしたままにすると縮むことができなくなります。このような材料を、粘性のほかに弾性の性質をもった流体、すなわち粘弾性流体と分類します。

なお、Maxwell モデルに一定の応力を負荷した場合は、Fig.3(b)のようにばねが瞬間的に伸び、その後、ダッシュポットが一定の速度で伸びる応答となります。



(a) 一定ひずみ負荷 (応力緩和) (b) 一定応力負荷

Fig.3 Maxwell モデルの応答

【 4 】 Voigt モデル

Maxwell の粘弾性流体の指摘に少し遅れて、1875 年、Kelvin は粘性的な流動をとまらう弾性固体、すなわち粘弾性固体の存在を指摘しました。粘度の高い油を吸ったスポンジによって、このような挙動を説明したと言われています。粘弾性固体は、弾性変形に時間的遅れを生ずるものの応力が 0 に消滅することではなく、また、Maxwell の粘弾性流体のように流動が無限に継続することがない性質があります。Kelvin と同じモデルは 1890 年に Voigt によっても独立に提案され、現在では Kelvin モデルあるいは Voigt モデルと呼ばれます。

Fig.4 に、その概念的なモデルを示します。このモデルは Hooke 弾性を表すばねと Newton 粘性を表すダッシュポットを並列に配置して構成されています。この Voigt モデルに応力 σ を与えたとき、その応力はばねが負担する応力 σ_1 とダッシュポットが負担する応力 σ_2 の和となります。

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \dots (7)$$

ばねの弾性定数 E とすれば, Hooke の法則より(8)式, またダッシュポットについては粘性係数を η とすれば Newton の粘性法則より(9)式が与えられます. 並列なので, ばねとダッシュポットに発生するひずみ ε は等しくなっています.

$$\sigma_1 = E\varepsilon \quad \dots (8) \qquad \sigma_2 = \eta d\varepsilon/dt \quad \dots (9)$$

(7)式に, (8)式と(9)式を代入すると, 次式が得られます.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \dots (10)$$

いま Fig.4 に示すように, 時間 $t=0$ で応力 σ_0 をこの Voigt モデルに与え一定に保持する条件を考えると, (10)式は一次の常微分方程式となるので, (11)式のようなひずみの応答が得られます. ここで τ_K は(12)式のように定義され, Maxwell モデルの τ_M と同じく時間の次元をもつ定数です.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \{1 - e^{-t/\tau_K}\} \quad \dots (11)$$

$$\tau_K = \eta/E \quad \dots (12)$$

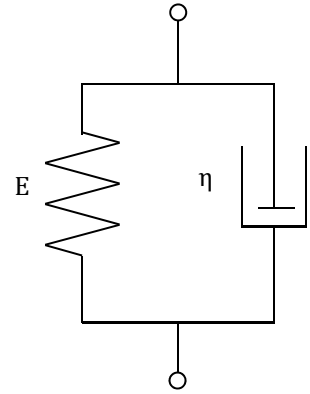


Fig.4 Voigt モデル

(11)式の応答を Fig.5(a)に示します. 時間 0 ではダッシュポットは凍結して動かないため, 応力を与えられても初期においてひずみは発生することができず, その後, ダッシュポットが緩むにしたがって指数関数的に増加することがわかります. このような挙動をクリープと呼びます.

ダッシュポットが完全に緩めば, 応力 σ_0 は全てばねが負担しなければならないので, ひずみは最終的に $\varepsilon_\infty = \sigma_0/E$ に近づいてゆきます. なお時間 $t = \tau_K$ では, 最終ひずみ ε_∞ の $1/e$ を残すまでひずみが発生しています. したがって τ_K は, Voigt モデルが最終の弾性平衡に達するのにどの程度遅れるかを表す定数(ないしはクリープの速さを表す定数)で, 遅延時間と呼ばれます.

このように弾性変形が瞬時には達成されない現象は弾性余効と呼ばれ, 例えば高温下の金属で観察されるほか, 高分子材料では顕著に見られます. Voigt モデルでは, 一定の応力の下では変形が一定以上に増大することはなく, 形状が留まるので, このような材料を粘性の性質をもった弾性固体, すなわち粘弾性固体と分類します.

なお, Voigt モデルに一定のひずみを負荷した場合は, Fig.5(b)のように凍結しているダッシュポットが無限大の応力を発生しますが, その後, ばねが一定の荷重を負担します. すなわち Maxwell モデルに見られるような応力緩和は示しません.

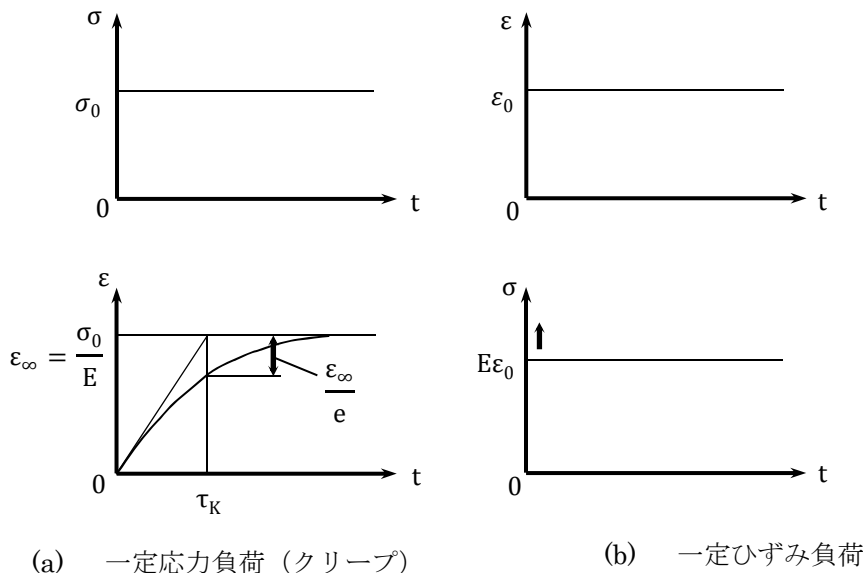


Fig.5 Voigt モデルの応答

【5】一般化 Maxwell モデル

ここまで示した単純な Maxwell モデルまた Voigt モデルを補うものとして、Fig.6 に示すような一般化 Maxwell モデルがあります。このモデルは複数の Maxwell モデルを並列に配置し、材料内部の高分子鎖がもつ無限に近い運動モードを近似的に表現することを意図しています。

いま各 Maxwell モデルの弾性率を E_i ，ダッシュポットの緩和時間を τ_i とするとき、それぞれの τ_i を時間の順に与えると、短い τ_i をもつダッシュポットから順に緩むモデルを作ることができます。このモデルに一定のひずみを負荷したときの応力緩和の応答は、(5)式を参照して以下ようになります。

$$\sigma(t) = E_e \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i} \varepsilon_0 \quad \dots (13)$$

いま各瞬間での応力とひずみの比 $\sigma/\varepsilon_0 = E(t)$ を考えると、見かけの弾性率 $E(t)$ の形式として、(13)式を以下のように書き直すことができます。

$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i} \quad \dots (14)$$

すなわち一般化 Maxwell モデルは、弾性率が時間と共に変化する弾性体と考えることができ、 $E(t)$ を緩和弾性率と呼びます。なお、 $E(t)$ はひずみ一定の応力緩和(relaxation)の条件下で定義される弾性率であるので、書籍によっては $E_r(t)$ と表記するものもありますが、ここでは簡便に $E(t)$ とします。

Fig.7 に、この緩和弾性率の応答を示します。まず時間 0 で一定のひずみが与えられると、ダッシュポットは凍結して動かないため、全てのばねの総和として $E(t)$ が与えられます。その後、ダッシュポットは τ_i の値にしたがって順に弛緩します。この結果、それぞれのダッシュポットに接続するばねは荷重を負担できなくなるので $E(t)$ は漸減し、最終的にモデルの左端に置かれた線形ばね E_e の弾性率に帰着します。もし E_e を 0 とすれば、残存する剛性のない、すなわち流体に相当するモデルになります。

一般の汎用 FEM では、一般化 Maxwell モデルを構成している個々の要素の E_i と τ_i および E_e を、入力データとして与えます。実際の粘弾性材料では、最大で 10~20 個の Maxwell モデルが使用されるのが通常です。このとき τ_i の並びとしては、おおよそ 1 桁ずつ時間のオーダーが大きくなるような構成とすると、適当な滑らかさを持つ曲線で全体の応答を表現することができることが知られています。

すなわち一般の高分子材料は、10~20 桁にわたる時間領域で剛性が変化する材料ということができます。この視点から推測すると、止まっているはずの大地が長い時間の経過のなかで流れ去るとするのは決して無茶な話ではありません。

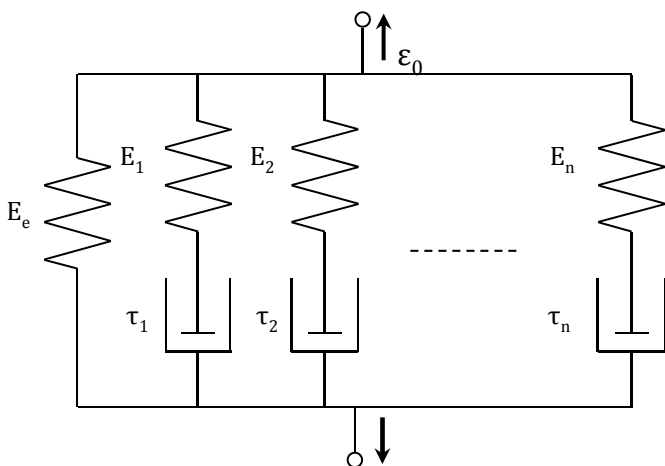


Fig.6 一般化 Maxwell モデル

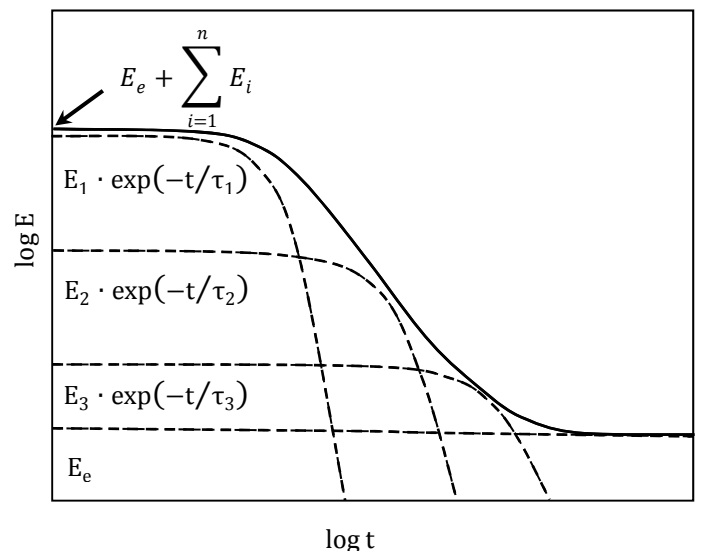


Fig.7 一般化 Maxwell モデルの緩和弾性率

【6】粘弾性モデルの履歴積分

粘弾性材料に負荷が与えられると、負荷が与えられた瞬間から応力の緩和、あるいはクリープひずみの増加といった時間に対する応答が始まります。前節までは、瞬間的に与えられた負荷が一定で保持される条件を考えてきましたが、実際の負荷の入力は時間的に一定とは限りません。このような場合、負荷の変化の影響は、その変化を生じた瞬間以降の応答に対して影響を与えると考えられます。すなわち、粘弾性材料は入力履歴に応じて応答が異なるという特徴を有します。

Maxwell モデルを例にとり、(4)式に示した応力緩和の微分方程式を積分形式で表現する方法を考えてみましょう。Fig.8(a)に示すような 0 から始まるひずみ入力 $\varepsilon(t)$ が与えられるものとし、この入力を微小なステップ状の入力 $\Delta\varepsilon_i$ の集合として考えます。まず時間 $t=0$ においては、ひずみ $\Delta\varepsilon_0$ が加わるとします。この入力に対する応力の応答は緩和弾性率の定義から $t=t$ において $E(t)\Delta\varepsilon_0$ となります。

次に $t=t_1$ においてひずみが $\Delta\varepsilon_1$ だけ増すと、 $t=t$ での応力には $E(t-t_1)\Delta\varepsilon_1$ の増分を生じます。 $\Delta\varepsilon_1$ による影響は、その変化が与えられた瞬間以降の応答(すなわち $t=t_1$ 以降の応答)に寄与し、それ以前の時間には遡らないことをこの式は意味しています。

同様の考え方を、 $t_2, t_3 \dots$ におけるひずみ増分 $\Delta\varepsilon_2, \Delta\varepsilon_3 \dots$ に適用すると、任意の時刻 $t=t$ における応力の応答 $\sigma(t)$ は、それぞれのひずみ入力の寄与の重ね合わせとして、次のように表されます。この様子を Fig.8(b)に示します。

$$\sigma(t) = E(t)\Delta\varepsilon_0 + E(t-t_1)\Delta\varepsilon_1 + \dots + E(t-t_i)\Delta\varepsilon_i = \sum_i E(t-t_i)\Delta\varepsilon_i \quad \dots (15)$$

ここで増分を微小とし、 $\Delta\varepsilon_i \rightarrow 0$ としてステップ状の入力を連続的な入力 $\varepsilon(t)$ に置き換えると、

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad \dots (16)$$

この式は、「ある時刻 t における応力 $\sigma(t)$ は、それ以前の時刻 $t=\tau$ におけるひずみ $\varepsilon(\tau)$ の変化速度に緩和弾性率を乗じたものを、全ての τ (ただし $\tau < t$) について総和したもので与えられる」ことを意味しています。このような積分の考え方を履歴積分(Duhamel 積分)と呼びます。

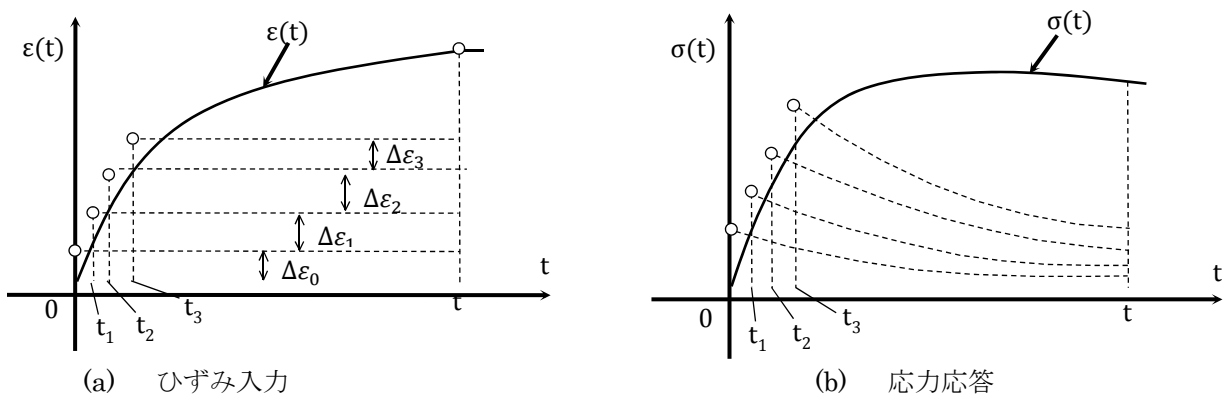


Fig.8 履歴積分の考え方

【7】粘弾性モデルの動的性質

履歴積分を用いると、任意の入力に対する時間的な応答を知ることができます。しかし時間的な応答は特定の入力に対する一過性の応答、すなわちその場限りの条件に対する解にしかすぎません。一般的な入力、本来、幅広い時間帯域に広がった千差万別の条件ですから、特定の時間応答の結果から現象を議論することには無理があります。現象の全体像を類推するためには、視点を変え、例えば時間の代わりに周波数に対する応答の違いを知るようなことが有効な対策となります。

既に示したように、時間的に一定なひずみ入力に対する応力緩和の現象は、時間とともに減少する弾性率によって表現されました。これに対して時間に対して周期的に変動するひずみを与えると、応力の振幅は周波数によって異なる値を示します。すなわち粘弾性材料は、時間に対してだけではなく周波数に対しても異なる弾性率を示します。また入力と応答の間に位相差を示す、すなわち減衰の効果が現れることも知られています。このような特性を、粘弾性材料の動的性質と一般に言います。

1950年代、近代的な粘弾性材料の研究が始まった当時、履歴積分で記述される時間的な挙動をラプラス変換やフーリエ変換を用いて周波数の問題に置き換えるという手法は、電気回路や振動の過渡応答の分野で既に知られている概念でした。この手法を踏襲することによって、初期の粘弾性学は急速な発展を見たと言われていました。

今日では、周波数入力による動的試験は粘弾性材料の機械的性質を代表する計測方法として位置づけられています⁶⁾。動的性質によって粘弾性特性の全体像が与えられるという特質以外に、周波数による試験は計測時間が短いという利点はその大きな理由の一つになっています。すなわち、応力緩和やクリープの試験が1~106sec程度の長時間を必要とするのに対して、一般的な動的粘弾性試験装置は10⁻⁶~1secの計測時間を対象としています。このため、恒温槽(例えば-150°C~600°C)を用意するような場合にも、クリープ試験などに比べて動的試験の負担は圧倒的に小さくなります。

機会を改めて説明しますが、粘弾性材料の温度依存性を利用すれば短時間側の計測結果から長時間側の挙動を推定することが可能であるので、動的試験によって広い帯域の粘弾性モデルを特定することが可能です。この結果、今日では一般的な粘弾性計測の方法として動的試験による計測が利用されています。

7.1. 弾性体と粘性体に対する正弦波入力

いま、時間とともに周期的に変化する入力として、以下のように複素表示された応力を考えます。

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} = \sigma_0 \cos \omega t + i\sigma_0 \sin \omega t \quad \dots (17)$$

弾性体に対する Hooke の法則(18)式に(17)式を適用すると、ひずみ、及びひずみ速度は(19)式のように与えられます。

$$\sigma = E\varepsilon \quad \dots (18)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} e^{i\omega t} \quad \dots (19)$$

$$\dot{\varepsilon} = i\omega \frac{\sigma_0}{E} e^{i\omega t}$$

このとき、応力とひずみは Fig.9(a)のように同位相の正弦波となりますが、ひずみ速度の位相は応力に対して 90°進みます。図中にはベクトル図も併記しているので参照してください。力学の観点からは、力と変位あるいは応力とひずみの内積が仕事を表します。いま応力とひずみのベクトルは同じ方向を向いている(内積の計算において cosθ=1 である)ので、応力はひずみに対して完全に(損失なく)仕事をするようになります。すなわち弾性体の場合は、外部から与えられた仕事は全て弾性エネルギーの形で材料内部に貯蔵されることになります。

一方、粘性体に対しては、Newton の粘性法則(20)式に(17)式を適用すると、ひずみとひずみ速度は(21)式のように与えられます。

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad \dots (20)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{i\omega t} \quad \dots (21)$$

$$\varepsilon = -i \frac{\sigma_0}{\eta\omega} e^{i\omega t}$$

このとき、Fig.9(c)のようにひずみは応力より 90°位相が遅れ、ひずみ速度は応力と同位相になります。応力とひずみのベクトルは直交している(内積の計算において $\cos\theta=0$ である)ので、応力はひずみに対して仕事をする事ができません。すなわち粘性体の場合は、外部から与えられた仕事を材料内部のエネルギーとして貯蔵することができず、全て損失エネルギーとして(多くは熱の形で)散逸します。

なお粘弾性体の場合は、次項および Fig.9(b)に示すように、弾性体と粘性体の中間の挙動となります。

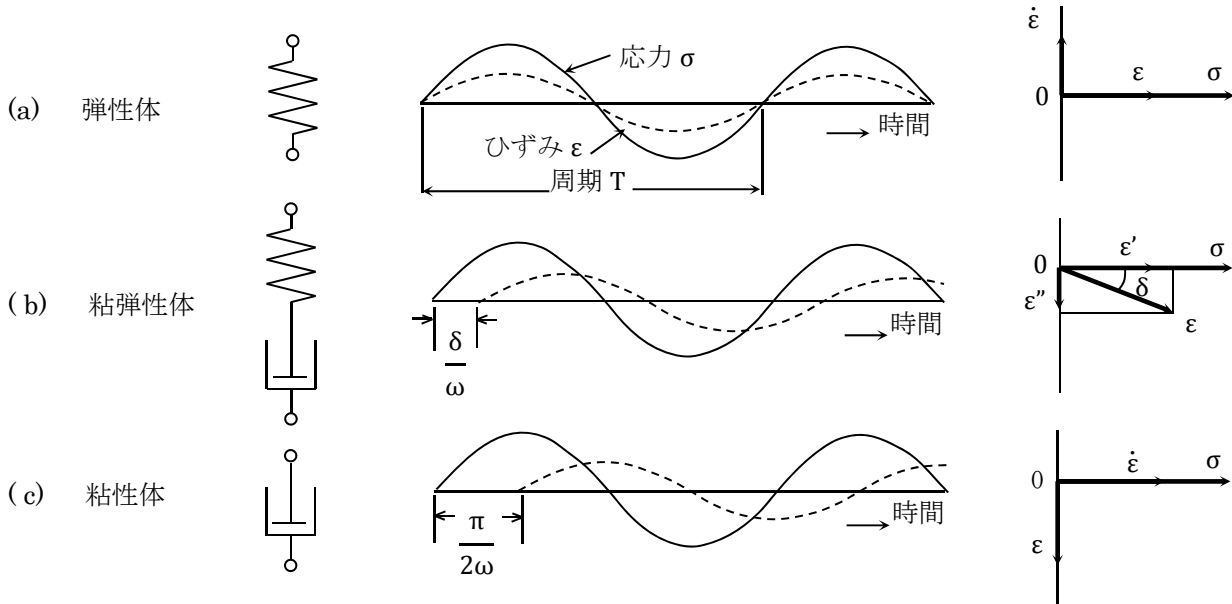


Fig.9 弾性体、粘弾性体および粘性体の動的応答

7.2. Maxwell モデルに対する正弦波入力

Maxwell モデルに(22)式に示すひずみ入力を与えられたときの応答を検討します。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{とすれば} \quad d\varepsilon/dt = i\omega\varepsilon \quad \dots (22)$$

この入力を Maxwell モデルの微分方程式(4)式に代入すると、応力は(23)式で与えられます。

$$\sigma = E \frac{\omega^2\tau^2 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \varepsilon = \sigma' + i\sigma'' \quad \dots (23)$$

すなわち、Fig.10 に示すように、応力はひずみと同じ位相をもつ実数部 σ' と、90°進んだ位相を持つ虚数部 σ'' からなる複素数となります。前項の議論から、実数部 σ' は弾性的な応力の成分、虚数部 σ'' は粘性的な応力の成分を表し、全体としてひずみより δ だけ進んだ位相を持ちます。ただし δ は以下のように与えられ、 $\delta=0$ であれば弾性体、 $\delta=\pi/2$ であれば粘性体の応答に一致します。

$$\tan \delta = \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{1}{\omega\tau} \quad \dots (24)$$

(23)式から応力とひずみの比として弾性率を表すと、次に示すようにこの弾性率は複素数であり、かつ角周波数 ω の関数になります。ここで $E^*(\omega)$ を複素弾性率、 $E'(\omega)$ を貯蔵弾性率、 $E''(\omega)$ を損失弾性率、 $\tan\delta$ を損失正接と呼びます。

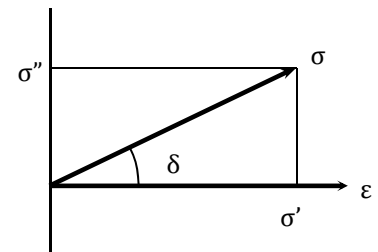


Fig.10 Maxwell モデルの複素応力

先に述べたように、貯蔵という用語は弾性エネルギーを材料内に貯える作用を意味します。また損失という用語は外部から得たエネルギーを粘性的に散逸させる作用を意味します。

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + iE \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad \dots (25)$$

すなわち単純マクスウェルモデルについて、

$$\text{貯蔵弾性率} \quad E'(\omega) = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} E \quad \dots (26)$$

$$\text{損失弾性率} \quad E''(\omega) = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} E \quad \dots (27)$$

$$\text{損失正接} \quad \tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} = \frac{1}{\omega \tau} \quad \dots (28)$$

(26)式および(27)式を図示すると、Fig.11 のようになります。この図の横軸は無次元化された周波数を示し、縦軸はMaxwell モデルの弾性率 E に対する貯蔵分 E' と損失分 E'' の分率を表します。まず、ばねの作用を表す E' について見てみると、低い周波数においてはダッシュポットが緩んでしまうため応力を発現させることができず、E' は小さい値にとどまります。

しかし周波数の増加にともなってダッシュポットが剛となると、応力をもっぱらばねの変形に依存するようになるため、E' の分率は 1 に近づきます。すなわち、E' は周波数の増加にともなって単調増加する傾向を示します。

またダッシュポットの作用を表す E'' について見ると、低い周波数では速度が小さいためダッシュポットの変位は生ずるものの応力を発揮することができず、小さい値にとどまります。また高い周波数では剛になって動けなくなるため、応力の発生はばねに支配され、E'' の分率は小さくなります。この結果、E'' は周波数軸の両側で 0 となり、中間的な周波数領域(E' の遷移領域)で極大値を持つ特性を示します。

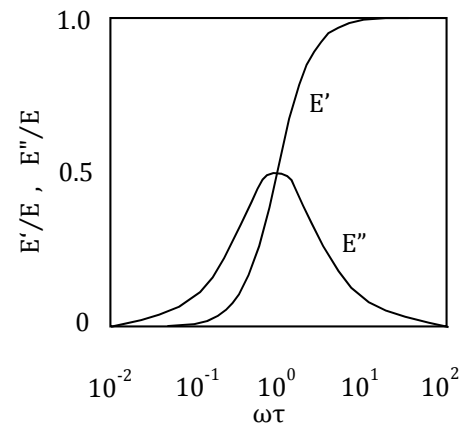


Fig.11 Maxwell モデルの周波数依存性

7.3. 一般化 Maxwell モデルに対する正弦波入力

一般化 Maxwell モデルに(22)式に示すひずみ入力を与えられたときの応答も同様に求めることができます。結果だけを示すと、次のようになります。

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E'(\omega) + iE''(\omega) = E_e + \sum E_j \frac{\omega^2 \tau_j^2}{1 + \omega^2 \tau_j^2} + i \sum E_j \frac{\omega \tau_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2} = \sum E'_j(\omega) + i \sum E''_j(\omega) \quad \dots (29)$$

すなわち一般化マクスウェルモデルについて、

$$\text{貯蔵弾性率} \quad E'(\omega) = E_e + \sum_{i=1}^N \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2} E_i \quad \dots (30)$$

$$\text{損失弾性率} \quad E''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} E_i \quad \dots (31)$$

$$\text{損失正接} \quad \tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad \dots (32)$$

エポキシ樹脂を対象として、 $E'(\omega)$ 、 $E''(\omega)$ を弊社において実際に計測した結果を Fig.12 に示します。高い周波数で高い弾性率を示す領域をガラス状領域、また低い周波数で低い弾性率を示す領域をゴム状領域、中間を遷移領域と呼びます。この例ではおよそ 12 桁の周波数範囲にわたって弾性率が変化することがわかります。

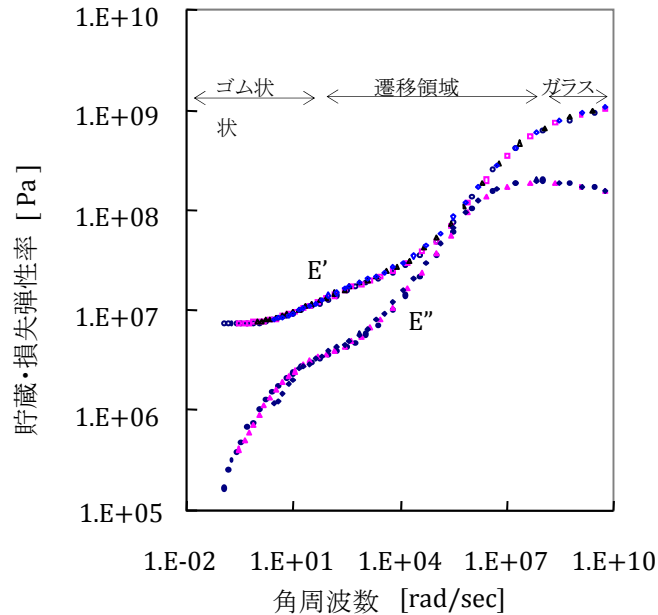


Fig.12 エポキシ樹脂の $E'(\omega)$ と $E''(\omega)$ (弊社での実測結果)

【 8 】 FEM 入力データの生成

一般の汎用 FEM を用いて粘弾性材料の時間応答を解析する場合、Fig.6 に示したような一般化 Maxwell モデルを構成している個々の要素の E_i 、 τ_i および E_e を、入力データとして与える必要があります。これらの入力は全て時間に対する応答を表すデータです。これに対して一般的な粘弾性計測から得られる特性は、Fig.12 に与えられるような周波数特性、すなわち貯蔵弾性率と損失弾性率であることが大半です。従って計測されたデータをそのまま FEM に適用することはできず、周波数特性から時間特性に改める換算を施すことが必要です。

粘弾性学の初期においては、この換算に対して(33)式あるいは(34)式に示す近似式が提案され、一定の成果を挙げられました⁽⁷⁾。例えば(34)式を用いると、緩和弾性率 $E(t)$ を極めて実用的に求めることが可能です。

$$E(t) = E'(\omega) \quad \text{ただし、} \quad \omega = 1/t \quad \dots (33)$$

$$\text{あるいは} \quad E(t) = E'(\omega) - 0.40E''(0.40\omega) + 0.014E''(10\omega) \quad \dots (34)$$

しかし現在では(30)式と(31)式に最適化の手法を用いて、 $E'(\omega)$ 、 $E''(\omega)$ の実測値を再現するような一般化 Maxwell モデルの定数値、すなわち個々の要素に対する弾性率 E_i 、緩和時間 τ_i および E_e を、直接求めることができるようになってきました。Fig.13 は、弊社で開発したプログラムの例を示します⁽⁸⁾。このプログラムについては次の機会に紹介しますが、以下の補足的な機能を有し、粘弾性材料モデルの実用的な同定を可能にしています。

- 緩和スペクトルの平準化
- (温度制御の不十分などによる)欠損のあるデータの補完
- マックスウェルモデル弾性率の正定

以上にマックスウェルモデルの基本的な性質を説明しました。次回以降は、粘弾性材料の温度依存性を利用した計測、また、その結果から汎用 FEM に入力する手法について説明して参ります。

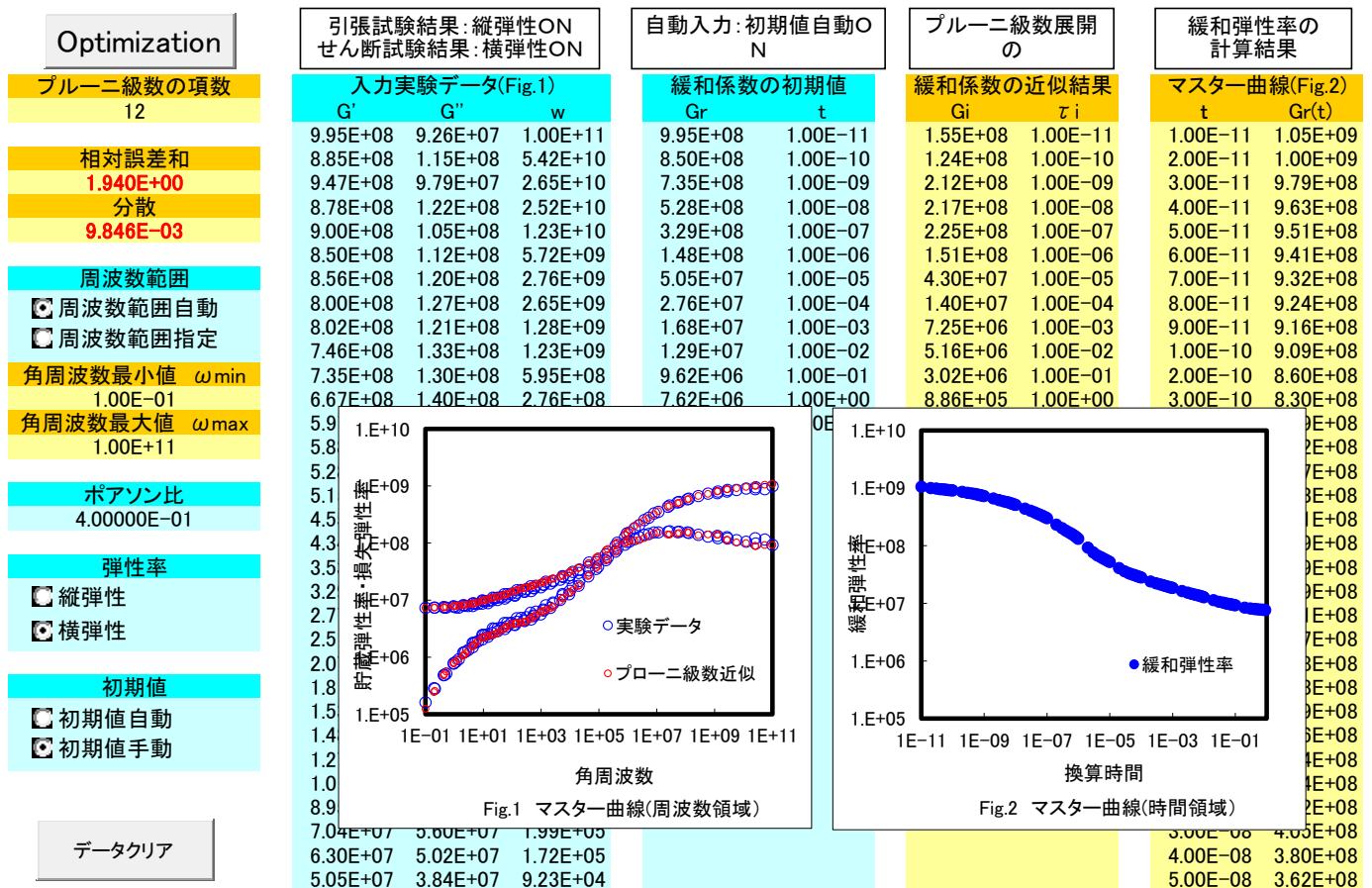


Fig.13 Excel を用いた粘弾性材料同定プログラム

謝辞

弊社の粘弾性に関する知見は、数年にわたって青山学院大学・隆雅久教授の指導を得て共同研究を進めてきた結果です(8)。粘弾性特性に関する実験計測，FEM 入力用のデータ同定プログラムの開発，および汎用 FEM による応用的な解析について研究開発を進めて参りました。ここに改めて謝意を表します。

参考文献

- (1) 弊社における粘弾性材料の計測と同定, Mech D&A News, vol.2005-1, 株式会社メカニカルデザイン, 2005.
- (2) ティー・エイ・インストルメント・ジャパン株式会社, <http://www.tainstruments.co.jp/>
- (3) 中原, 材料力学, 上巻, p.10, 養賢堂, 1991.
- (4) 日本規格協会編, ASME 規格の基礎知識, 改訂版, 日本規格協会, 1989.
- (5) 富田, レオロジー, コロナ社, pp.1~8, 1975.
- (6) 例えば, JIS K7244-1-2006, プラスチック-動的機械特性の試験方法-第1部: 通則.
- (7) 小野木, 高分子と複合材料の力学的性質, 化学同人, 1995.
- (8) 例えば, 藤川, 三上, 隆, 三原, 小林, 線形粘弾性特性係数関数の実用的近似法, 日本機械学会論文集, A 編, 72-723, p.109, 2006.

表紙: Edouard Manet, A Bar at the Folies-Bergeres, 1882, Oil on canvas, Courtauld Institute Galleries, London.

株式会社 メカニカルデザイン
 〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階
 TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106
 E-mail:comm@mech-da.co.jp <http://www.mech-da.co.jp/>